





Repairs
$30⁰⁰

DISCUSSIONS

SUR LES

PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

POITIERS. — IMPRIMERIE DE N. BERNARD.

DISCUSSIONS

SUR LES PRINCIPES DE LA

MÉCANIQUE

EXAMEN CRITIQUE

DES PRINCIPALES THÉORIES OU DOCTRINES ADMISES
OU ÉMISES EN CETTE SCIENCE

PAR

F. COYTEUX

Auteur de : *Discussions sur les principes de la physique*, et de divers autres ouvrages

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER
Imprimeur-Libraire
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE
QUAI DES AUGUSTINS, 55

—

1870

ERRATA

Page 16 ligne 20, *au lieu de :* de marbre de métal, *lisez :* de marbre, de métal.

Page 20, ligne 16, *au lieu de :* molécules extérieures aux corps..., *lisez :* molécules extérieures au corps...

Page 34, ligne 18, *au lieu de :* le nombre fini, si petit qu'il soit, *lisez :* la quantité finie, si petite qu'elle soit.

Page 92, ligne 2, *au lieu de :* à l'une de ces extrémités A, *lisez :* à l'une de ses extrémités A.

Page 127, ligne 18, *au lieu de : angle égal à celui de deux plans, lisez : angle égal à celui des deux plans.*

Page 192, ligne 5, *au lieu de :* l'élément qui répond $a\,\theta = 0$, *lisez :* l'élément qui répond à $\theta = 0$.

Page 213, ligne 20, *au lieu de* : D'ailleurs, ce n'est pas à ce point de vue..., *lisez* : D'ailleurs, ce n'est pas précisément à ce point de vue...

Page 221, ligne 12, *au lieu de :* entre les corps élastiques, *lisez* : entre les corps solides élastiques ou non élastiques.

Page 246, ligne 20, *au lieu de :* 1° considérons des points m', m', m'', etc., comme invariables entre eux et comme respectivement animés des forces P′, P′, P″, etc., *lisez* : 1° considérons des points m, m', m'', etc., comme invariables entre eux et comme respectivement animés des forces P, P′, P″, etc.

Page 256, ligne 22, *au lieu de :* capable de donner ou corps *m*...., *lisez :* capable de donner au corps *m*....

Page 285, ligne 22, *au lieu de :* la somme de tous leurs points...., *lisez :* la somme des forces vives de tous leurs points....

Page 306, ligne 29. *au lieu de :* $F = m\frac{t^2}{R}$, *lisez* : $F = m\frac{v^2}{R}$.

Page 307, ligne 28, *au lieu de :* $F = mv^2 = R$, *lisez :* $F = mv^2 : R$.

Page 316, ligne 16, *au lieu de :* $MA_1 = \sqrt{a^2 - x^2 : a}$, *lisez :* $MA_1 = \sqrt{a^2 - x^2} : a$.

Page 322, ligne 7, *au lieu de* : tendant à les séparer les unes les autres, *lisez :* tendant à les séparer les unes des autres.

Page 357. ligne 9, *au lieu de :* $\frac{1}{2}\,dv^2$, *lisez :* $\frac{1}{2}\,d.v^2$.

Même page, ligne 13, *au lieu de :* $\frac{1}{2}\,d.v^2$, *lisez :* $\frac{1}{2}\,d.v^2$.

Page 376, ligne 17, *au lieu de :* les oppositions et les conjections, *lisez :* les oppositions et les conjonctions.

Page 400, ligne 16, *au lieu de :* s'écarte de cette loi générale, *lisez :* s'écartent de cette loi générale.

Page 463, ligne 17, *au lieu de* : ou bien le fluide placé entre elles varieraient..., *lisez :* ou bien le fluide placé entre elles varierait. ..

INTRODUCTION

J'ai publié, il y a quelques années, un livre intitulé *Discussions sur les principes de la physique* (1). Dans celui que j'offre aujourd'hui au public, mes investigations critiques se sont portées sur les principes de la Mécanique.

J'y montre que la Mécanique est loin d'être une science exacte; que la plupart de ses principes pèchent en eux-mêmes et conduisent à des antinomies, à des contradictions, à des impossibilités. On y verra que, sous divers rapports, ces principes et les solutions qu'on en a déduites s'évanouissent sous les regards de la raison pure qu'ils ne peuvent supporter.

Les corps doivent être considérés comme des assem-

(1) 1 vol. in-8°, chez Gauthier-Villars, libraire-éditeur, quai des Augustins, 55.

blages de molécules, de parties élémentaires fort ténues et très-distantes les unes des autres relativement à la ténuité de leurs masses respectives. Ces parties tendent plus ou moins à rester à leurs positions dans les corps solides, à en changer dans les liquides et les gaz. J'ai montré ailleurs (*Discussions sur les principes de la physique*) que ces tendances ne peuvent s'expliquer convenablement que dans l'hypothèse de deux forces antagonistes, l'une d'attraction ou de cohésion, l'autre de répulsion. Je crois devoir reproduire ici, dans leurs parties essentielles, les considérations que j'ai présentées à ce sujet :

« Les corps sont très-inégalement compressibles. Les gaz le sont éminemment ; il est des corps qui le sont extrêmement peu, qui paraissent résister à d'énormes pressions : les liquides sont généralement dans ce cas.

» De même les corps varient considérablement sous le rapport de leur cohésion, de la force qu'il est nécessaire d'employer pour écarter leurs molécules. Il y en a qui n'offrent qu'une faible cohésion ; d'autres montrent une cohésion très-intense.

» Les corps sont aussi très-différents sous le rapport de l'élasticité. Certains paraissent peu ou point élastiques, tandis que d'autres le sont évidemment, à un très-haut degré.

» Sans une force répulsive, sans un fluide répulsif intermoléculaire, on ne saurait se rendre compte de la

résistance que rencontre la compression des corps, on n'expliquerait point l'élasticité, du moins celle de compression..... La cohésion révèle l'attraction moléculaire.

» On peut fort bien expliquer tous les faits relatifs à la compressibilité, à la cohésion, à l'élasticité, en supposant un fluide répulsif placé entre les molécules des corps et une attraction mutuelle entre ces molécules, si l'on admet d'ailleurs que la répulsion du fluide et l'attraction moléculaire s'accroissent quand la distance diminue.

» S'agit-il de rendre compte de ce que tel corps est peu compressible, de ce qu'il résiste fortement à la compression? On l'expliquera, en considérant que la compression, rapprochant les molécules du corps, rapproche aussi les unes des autres les parcelles du fluide placées entre elles, augmente ainsi la densité du fluide et par suite la répulsion qu'il exerce; et en supposant de plus que la répulsion s'accroît alors plus rapidement que ne le fait l'attraction mutuelle des molécules du corps par suite de leur propre rapprochement. La grande cohésion d'un corps, ou le grand effort nécessaire pour séparer les molécules, proviendra au contraire d'une prédominance de l'attraction sur la répulsion pendant l'action qui tend à les séparer.

» Un corps offre-t-il peu de résistance à la compression? Ne présente-t-il qu'une faible cohésion? C'est que les forces répulsives et attractives se font à peu près

équilibre pendant l'action qui tend à opérer la compression ou la désagrégation.

» Nulle difficulté non plus pour rendre compte de l'élasticité. Celle de *compression* résultera évidemment de ce que l'accroissement de répulsion produite par la condensation forcée des parcelles du fluide, l'emportera plus ou moins sur l'accroissement de l'attraction mutuelle des molécules par l'effet de leur rapprochement. Celles-ci alors tendront à revenir sur leurs pas, à reprendre la place qu'elles occupaient avant la compression.

» Pour expliquer l'élasticité de *traction* ou de *tension*, je distinguerai deux cas : ou bien les molécules écartées, dans un corps, ont été rapprochées d'autres molécules du même corps, ou bien leur écart a eu lieu en maintenant entre elles et celles venant ensuite les distances existantes avant le mouvement. Pour fixer les idées, considérons seulement une file de trois molécules *a*, *b*, *c*, à égale distance entre elles, et admettons qu'elles soient d'abord en repos par l'équilibre des forces attractive et répulsive entre *a* et *b* et entre *b* et *c* considérées par couple. On peut supposer que, *a* restant en repos, *b* et *c* reçoivent à la fois une égale impulsion qui les éloigne de *a*, en maintenant entre elles leur première distance; on peut supposer aussi que *b* s'éloigne de *a* et s'approche de *c*, *a* et *c* restant à leur place. Dans le premier cas, si *b* et *c*, abandonnées à elles-mêmes, reviennent successivement sur leur pas vers *a*, ce sera par l'attraction

mutuelle de ces molécules, par leur force de cohésion qui l'emportera sur la force répulsive tendant à les séparer; mais, dans l'autre hypothèse, ce sera la force répulsive qui, prédominante entre *b* et *c*, par suite de leur rapprochement, déterminera *b* à revenir sur ses pas. En ce cas, en effet, ce ne peut être la force attractive qui cause le retour de *b* vers *a*, car *b* se trouvant plus rapprochée de *c* que de *a*, l'attraction devrait moins la porter vers *a* que vers *c*. Or, ce que je dis pour ces trois molécules peut s'appliquer à un plus grand nombre.

» Maintenant si, sortant des hypothèses, je me demande ce qui a lieu en réalité, je me répondrai qu'il n'est guère présumable, admissible, qu'un corps soit étiré de telle sorte que, parmi les molécules écartées, bon nombre ne soient pas rapprochées d'autres molécules du corps, et que par suite la force répulsive n'ait pas une part notable, sinon prédominante, dans l'action qui ramène vers leur place les molécules écartées.

» Si l'écart opéré entre les molécules d'un corps passe certaine limite, il peut être trop grand pour que les molécules écartées reviennent à leur place ou à peu près. En ce cas, l'élasticité de tension fait sensiblement défaut. Il est facile de le concevoir.

» Le degré d'élasticité provient notamment de la plus ou moins grande quantité de fluide répulsif comprimé, et aussi du degré d'attraction qu'exercent les unes sur les autres les molécules du corps.

» Un corps sera peu élastique, par exemple, quand, après sa compression, la répulsion du fluide ne l'emportera que faiblement sur l'attraction des molécules entre lesquelles il sera pressé, et qui, par suite, resteront à peu près à la place qu'elles auront prise par l'effet de la compression.

» Il y a deux manières de concevoir la répulsion effectuée par le fluide intermoléculaire et qui tend à écarter les molécules des corps.

» Ou bien les parcelles du fluide, par leur nature même, repoussent la matière générale, les molécules des corps; ou bien les parcelles du fluide, aussi par leur nature, se repoussent mutuellement et réagissent ensuite, par l'impulsion qui en résulte, sur les molécules de la matière générale, lorsqu'elles les rencontrent sur leur chemin. Nous verrons clairement que la dernière de ces hypothèses est la préférable; qu'elle est même indispensable pour l'explication de bien des faits? Nous verrons même que la matière des corps doit être considérée comme attirant le fluide répulsif.

» Si l'on supposait, avec MM. Keller, qu'il n'y a que des forces répulsives agissant au contact, l'on rencontrerait une foule de difficultés, d'impossibilités.

» Dans cette hypothèse, ou la répulsion au contact a lieu seulement entre les parcelles de l'éther, ou elle a lieu uniquement entre ce fluide et les molécules des corps, ou enfin elle s'opère de ces deux manières.

» Dans la première supposition, si les parcelles de fluide en contact sont de même nature, elles ne font alors qu'une masse, qu'un tout excluant la possibilité d'une répulsion, d'une séparation par répulsion mutuelle des parcelles composantes. Vainement dirait-on que ce tout a été composé de deux parcelles distinctes, et que, puisqu'elles ont été distinctes, elles peuvent le devenir encore. Je demanderais quelle différence il y aurait entre ce tout ainsi composé et un tout de même nature, forme et étendue, qui aurait toujours été ce qu'il serait. Évidemment, il n'y aurait aucune différence, et, dans ce dernier cas, on ne saurait supposer qu'une partie du tout repousse l'autre; il ne serait donc point rationnel d'admettre la répulsion, la séparation possible par répulsion dans le cas d'un contact, d'une réunion absolue de deux parcelles de même nature.

» Supposera-t-on, pour conjurer cette *irrationalité*, que les parcelles du fluide ne sont pas de même nature, que toutes diffèrent entre elles sous ce rapport? Cette supposition serait hardie, mais peu satisfaisante; elle jetterait le trouble dans les théories physiques. Qu'on admette divers fluides éthérés, on le peut sans inconvénient, et nous verrons même qu'il le faut pour rendre compte des phénomènes de la lumière et de l'électricité; mais, s'il n'y a pas deux parcelles éthérées de même nature, comment classer leurs actions, leur coopération? On admet certainement des molécules de même

nature; celles d'oxigène, par exemple, sont conçues comme telles, et il en est ainsi des molécules d'hydrogène, de carbone, etc. Et certes cette conception de substances similaires est utile, indispensable. Or, il y a même raison pour supposer des parcelles similaires de fluide éthéré, et en les supposant, je l'ai montré, il n'est pas rationnel d'admettre qu'elles se repoussent au contact.

» Si, au contraire, on admet que les parcelles du fluide se repoussent à distance, on peut aussi supposer que leur répulsion mutuelle est telle que jamais la compression ne saurait avoir la puissance de les réunir, et ainsi la difficulté s'évanouit.

» Au reste, les phénomènes, notamment la facilité avec laquelle se produisent généralement les mouvements dans l'espace, montrent que les parcelles du fluide éthéré doivent être excessivement ténues et fort distantes les unes des autres relativement à leur volume; il faut donc convenir qu'il y a peu de chances pour que ces parcelles se rencontrent, et qu'il serait par conséquent difficile d'admettre que tous les mouvements, tous les phénomènes n'ont pour causes premières que les répulsions qu'elles exerceraient entre elles au contact seulement.

» Si ces considérations portaient à préférer l'hypothèse qui n'attribuerait à l'éther de répulsion que sur les molécules du corps, on y trouverait d'autres difficultés.

» Premièrement. Si on l'admettait, si l'on concevait ainsi la force répulsive et son action, il s'ensuivrait que des vibrations ne pourraient se produire que là où il y aurait de la matière ordinaire. La chaleur et la lumière, qu'on ne peut expliquer que par des mouvements vibratoires, ne pourraient exister, se propager dans des milieux qui seraient vides de cette matière, ne contiendraient que du fluide éthéré. Or, ceci est démenti par l'expérience ; car, dans le vide, la lumière se transmet, se propage, et il en est même ainsi de la chaleur. Qu'il reste encore quelques molécules de matière ordinaire dans le vide qu'on peut obtenir, je l'admets ; mais il y en a peu, relativement, et trop peu pour qu'on lui fasse jouer un rôle important, indispensable dans les cas dont il s'agit.

» Secondement. Supposons une répulsion mutuelle exercée au contact entre les parcelles du fluide et les molécules de la matière générale. Supposons qu'une ou plusieurs parcelles de fluide soient en contact avec une molécule : celle-ci se mettra en mouvement et rencontrera quelque parcelle de fluide intermoléculaire qui la repoussera en sens inverse. De cette manière, il y aura vibration de la molécule, et si la parcelle de fluide, repoussée elle-même, a été heurter une molécule voisine, elle en éprouvera une répulsion qui tendra à la faire rétrograder. Ainsi se produiraient des vibrations et des molécules et du fluide éthéré placé entre elles. Mais,

si les parcelles de fluide en mouvement rencontrent des parcelles similaires, elles *s'unifieront* avec elles pour ne plus se séparer, et ce résultat serait un peu gênant pour l'explication des phénomènes : on pourrait craindre que des rencontres de ce genre fussent assez fréquentes pour que le fluide perdît sensiblement de sa ténuité.

» D'après les résultats possibles des répulsions, telles que je viens de les concevoir, les corps les plus poreux seraient ceux dont les molécules et le fluide vibreraient continuellement avec le plus d'intensité. Or, s'il est bien des corps poreux qui offrent cet état vibratoire, il en est aussi qui ne paraissent point présenter ce caractère. J'ai déjà fait observer que certains corps, tels que le liége, la pierre ponce, sont très-légers, conséquemment très-poreux, bien que rien n'annonce que leurs molécules et leur fluide aient un mouvement vibratoire énergique ; bien que, notamment, ils ne soient ou puissent n'être ni chauds ni lumineux.

» Qu'on admette une répulsion au contact entre les parcelles du fluide, ou que la répulsion, aussi au contact, soit supposée s'exercer directement entre les parcelles du fluide et les molécules des corps, on ne saurait donner des explications satisfaisantes des degrés de cohésion, de compressibilité et d'élasticité.

» Parmi les corps, il en est de très-compressibles, conséquemment très-poreux, qui sont fort peu élastiques. Si leur porosité est due uniquement à la grande quantité

ou à des vibrations énergiques de leur fluide intermoléculaire, pourquoi offrent-ils peu de résistance à la compression et peu d'élasticité ?

» Ce n'est pas au milieu ambiant qu'il faut attribuer les degrés de compressibilité et d'élasticité des divers corps ; car ces degrés se manifestent dans des milieux semblables, analogues.

» L'extrême cohésion qu'on observe dans certains corps est certainement l'effet de leur attraction moléculaire. La cause de l'inégalité de cohésion qu'ils présentent ne pourrait être attribuée aux divers degrés de pression exercée sur eux par le milieu ambiant : placés dans un même milieu, leur cohésion est bien loin d'être égale. Est-ce la pression extérieure, celle de l'atmosphère, qui fait que deux surfaces bien planes appliquées l'une sur l'autre adhèrent si fortement qu'il faut un poids considérable pour les séparer? Qui ne connaît, à ce sujet, les expériences si souvent répétées des plans de plomb, de verre, ou de marbre? Et qui ne sait aussi que l'expérience réussit encore sous un récipient où l'on a fait le vide?

» Supposez le concours d'une force attractive et d'une force répulsive à distance, dont les actions croissent quand la distance est moindre, et tous ces faits s'expliquent ; plus de difficultés sérieuses pour rendre compte de l'inégalité de compressibilité, d'élasticité, de cohésion, dans les corps différents, et dans un même corps suivant les états qu'il affecte.

» Le milieu dans lequel un corps se trouve placé a ici une influence plus ou moins grande ; il faut tenir compte de la pression de l'air ; mais bien vainement on chercherait à tout ramener à des questions de répulsions, d'actions au contact, soit intérieures, soit extérieures.

» La *ductilité* et la *malléabilité* tiennent évidemment à la grande force de cohésion, d'attraction mutuelle des molécules des corps doués de ces propriétés : alors, des molécules, forcément écartées, entraînent avec elles celles qui les avoisinent et ainsi le corps s'étend, s'étire sans se rompre. Il est bien impossible d'expliquer les faits dont il s'agit par des répulsions, par la pression atmosphérique ou autre pression extérieure ; car, dans un même milieu, les corps sont ou ne sont pas malléables ou ductiles.

» L'action moléculaire se produit, se manifeste encore dans un ordre de phénomènes qu'on désigne sous les noms de *capillarité*.

» On connaît l'expérience du disque de verre, de marbre de métal, etc., qui adhère à la surface du liquide qu'il touche. Cette adhésion, ayant lieu même dans le vide, ne peut être produite par la pression de l'air ; elle doit résulter d'une force d'affinité qui n'exerce une action sensible qu'à des distances extrêmement petites ; car quelque épaisseur que l'on donne à la matière du disque, si la nature et le contour de sa surface est la même, la

force qu'il faut employer pour le détacher d'un liquide donné est aussi la même sensiblement.

» Un tube capillaire étant plongé dans un liquide, ce liquide, s'il est de nature à mouiller le tube, s'élance dans son intérieur et s'y maintient au-dessus du niveau naturel d'autant plus que le tube est plus étroit. Ces faits, qui paraissent se produire également dans le vide et dans l'air ne peuvent tenir à la pression de l'air; ils doivent dépendre d'attractions qui ne sont appréciables qu'à de minimes distances: si, en effet, l'on fait varier l'épaisseur du tube, sans changer son diamètre intérieur, les élévations ou les abaissements du liquide y demeurent les mêmes qu'auparavant. »

Ne voulant pas admettre l'attraction moléculaire, on a cherché une explication de la cohésion dans un mouvement rotatoire attribué aux molécules; mais on ne saurait ainsi expliquer pourquoi, si l'on saisit et tire vers soi un corps, un bâton, par exemple, par une extrémité seulement, tout ce corps suit le mouvement imprimé à la partie saisie et tirée. L'on ne peut pas dire que, si les molécules de cette partie suivent celles qui sont directement emportées, déplacées, ce n'est pas là un effet de cohésion, mais un effet d'élasticité, de tension des molécules non saisies, de même que des molécules d'un gaz comprimé s'écartent quand la compression cesse. Cela ne serait point admissible, car ce n'est pas, principalement du moins, par la compres-

sion que les molécules d'un corps solide sont retenues les unes près des autres : on le voit en faisant le vide sur un corps dur placé sous le récipient de la machine pneumatique : il reste sensiblement dans le même état de densité. Dira-t-on que, si le récipient est alors à très-peu près vide d'air, il peut contenir quelque autre fluide dont la pression continue à maintenir le corps à l'état de solidité? — Si cela est, pourquoi ce prétendu fluide qui, dans le récipient, maintient les unes près des autres les molécules du corps solide ne peut-il, à beaucoup près, exercer le même pouvoir sur les liquides, dont les molécules s'écartent si considérablement en ce cas? Cette différence ne saurait tenir uniquement à ce que les molécules des liquides seraient plus écartées que celles des solides par la force répulsive agissant entre elles; car il est tel corps liquide dont la densité est plus grande que celle de tel solide gardant sensiblement sa densité dans le vide de la machine pneumatique. D'ailleurs, si au lieu de ce bâton que j'emporte en totalité en le tirant par un bout, je veux saisir et entraîner une masse liquide, je n'entraîne qu'une très-faible partie de ce corps; ce qui ne devrait pas arriver, si les molécules avaient une si grande tendance à s'écarter par la force répulsive interposée, n'étaient retenues les unes près des autres que par des forces extérieures, par la pression de l'air et celle de quelque autre fluide. Il faut donc toujours en venir à reconnaître que les molécules

du corps ont par elles-mêmes une tendance à rester rapprochées les unes des autres, qu'il y a une force de cohésion qui les régit, qui ne leur est pas extérieure et ne saurait consister dans un mouvement rotatoire ou autre, qu'elles effectueraient.

Des physiciens refusent toute *force réelle* à la matière; ils professent qu'on peut expliquer tous les phénomènes physiques et même chimiques sans recourir à des forces réelles, et en ne considérant dans les corps que la *force d'inertie*.

Cette doctrine étrange est insoutenable. En vertu de l'inertie, une molécule est par elle-même indifférente au repos ou au mouvement, en ce sens que, si elle est en repos, elle y restera tant qu'une cause extérieure ne la fera pas sortir de cet état, et si elle est en mouvement elle y restera et gardera son même mouvement en direction et intensité tant qu'une cause externe ne viendra pas arrêter son mouvement ou le modifier; or, comment avec ces données se rendre compte des phénomènes de cohésion et d'affinités moléculaires? comment expliquer ceux d'élasticité? comment concevoir la gravitation, la pesanteur?

Si l'on admet, avec beaucoup de physiciens, que les molécules des gaz élastiques rebondissent sur les parois des vases où ils sont emprisonnés, certes on ne peut attribuer cet effet à l'inertie. Par l'inertie, les molécules du gaz qui sont en mouvement devraient rester unies aux

parois du vase. L'élasticité exige l'hypothèse d'une force répulsive. Si un corps comprimé diminue de volume par la compression, reprend son volume quand la compression cesse, ce retour ne peut résulter de l'inertie de ses molécules : il faut supposer ici quelque force répulsive intermoléculaire qui a été momentanément vaincue par la compression et qui reprend son empire aussitôt que celle-ci n'existe plus. Quand un corps élastique est forcément étiré de manière à éloigner ses molécules les unes des autres, et que, abandonné ensuite à lui-même, ses molécules reprennent leur place primitive, il n'y a point non plus moyen d'expliquer ce phénomène par l'inertie. Il est nécessaire de supposer quelque force attractive qui rapproche les unes des autres les molécules violemment écartées ; il n'est point supposable que ce soit seulement par des chocs de molécules extérieures aux corps qu'il se resserre et reprend son premier état ; car mettez à sa place un autre corps mou, non élastique, et étirez-le, il gardera sensiblement l'état, la forme que vous lui aurez donnés.

Si les molécules des gaz, des vapeurs tendent à se séparer de plus en plus, cela n'est point dû à l'inertie de la matière de ces gaz ou vapeurs. Ces corps peuvent se condenser par le refroidissement ; quelques-uns peuvent même être liquéfiés et solidifiés : ce qui ne peut s'expliquer qu'en admettant que, par le rapprochement de leurs molécules, l'attraction moléculaire finit par équi-

librer et même par surpasser la force répulsive qui tendait à les écarter les unes des autres.

La lumière, la chaleur et les sons s'expliquent par des vibrations. L'hypothèse des émanations est justement abandonnée. Or, des vibrations, ce mouvement de va et vient qu'il faut admettre, ne peuvent non plus résulter de l'inertie, de simples mouvements et chocs de parcelles inertes. S'il n'y avait aucune force répulsive, une parcelle qui en rencontrerait une autre ne rebondirait pas. Toutes les molécules ou parcelles semblables qui se rencontreraient, s'uniraient dès lors pour ne former qu'un corps, qu'une file continue; elles ne formeraient point des vibrations laissant entre elles des espaces vides; espaces qu'il faut pourtant bien admettre, car les corps sont poreux et les vibrations doivent pouvoir s'établir dans toutes les directions.

Le R. P. Secchi, dans un livre intitulé : *L'unité des forces physiques*, admet aussi que l'explication de la lumière nécessite l'hypothèse de l'éther, d'un fluide sensiblement impondérable, en vibration; mais il croit qu'il n'en est pas ainsi des sons ni même de la chaleur dont, suivant lui, on peut se rendre compte sans le secours de ce fluide.

Un des motifs qui le portent à supposer l'éther, c'est la difficulté d'admettre l'attraction à distance. Avec Newton, qu'il cite à ce sujet, il pense que les corps, les astres notamment, agissent les uns sur les autres par

l'intermédiaire de quelque fluide interposé. Ce fluide serait l'éther, le même que celui dont les vibrations donneraient la lumière et divers autres phénomènes. Mais cette idée est fausse, car l'éther, le fluide auquel seraient dues les vibrations lumineuses se composerait de particules se repoussant entre elles, phénomène contraire à l'attraction qu'on veut expliquer par cet intermédiaire.

Le R. P. Secchi paraît croire que l'éther exclut le vide; il n'a pas senti, compris que, s'il n'y avait pas de vide entre les corps et leurs molécules, entre les particules de l'éther, les divers mouvements, tous les phénomènes, notamment ceux de vibrations, de compressions, de condensations et de dilatations, s'évanouiraient.

Le même auteur est aussi partisan de l'hypothèse de la rotation moléculaire; il croit y trouver un moyen d'expliquer les vibrations. A l'appui de cette opinion, il dit que parmi les beaux théorèmes découverts par Poinsot sur la théorie du choc des corps en rotation, se trouve celui de leur *réflexion* contre un obstacle résistant où il nous apprend que, par la seule rotation, un *corps dur* et *non élastique* peut rebondir absolument comme un corps parfaitement élastique; phénomène, paradoxal en apparence, qui serait dû à la transformation d'une partie du mouvement rotatoire en mouvement de translation; d'où il résulterait une augmentation de la vitesse du centre de gravité.

Mais je nie que Poinsot ait vraiment démontré cela. Je maintiens que si une molécule n'était pas renvoyée par quelque force répulsive, par l'éther comprimé entre elle et le plan choqué, elle ne rebondirait point, alors même qu'elle serait en rotation au moment du choc. Poinsot, dans cette prétendue démonstration, s'est certainement mis à un faux point de vue.

L'hypothèse de la rotation des molécules est fort en vogue maintenant. Les uns l'invoquent pour expliquer la cohésion, d'autres pour rendre compte des vibrations moléculaires, de la chaleur notamment : ce qui est inconciliable ; car la cohésion tend à retenir les molécules les unes près des autres, tandis que la chaleur tend à l'effet contraire. En général, les corps sont d'autant plus denses que la cohésion de leurs parties est plus intense ; la chaleur, au contraire, dilate et diminue généralement la densité.

On aura beau faire, on n'expliquera rien si l'on n'en revient pas à l'hypothèse de l'attraction et à celle de l'éther de quelque fluide répulsif intermoléculaire et généralement répandu dans l'espace.

A l'hypothèse de l'attraction ou répulsion à distance, l'on a objecté qu'un corps ne saurait agir sur un autre qu'à la condition de se trouver en contact avec lui.

Quant à moi, je me préoccupe peu de cette objection, et voici pourquoi : un corps ne pourrait agir sur un autre d'une manière quelconque, et notamment

de manière à le mettre en mouvement, qu'à la condition de modifier l'essence, la substance même de ce corps ; or, une telle modification serait impossible, alors même qu'il y aurait contact immédiat entre les deux corps (1). L'objection est donc sans valeur à mes yeux. Faisant tant que d'admettre des actions réelles exercées par des corps sur d'autres corps, on peut aussi bien supposer que ces actions ont lieu à distance que supposer qu'elles ont lieu au contact. Que l'on cesse donc d'opposer contre l'attraction et la répulsion à distance ce lieu commun, que les corps ne peuvent agir qu'au contact.

Mais, pour en revenir à la mécanique, quelles que soient les forces qui soient supposées agir sur les molécules, et d'où résulteraient la constitution des corps, leur élasticité, leur compressibilité, etc. ; que ces forces soient attractives ou répulsives, intérieures ou extérieures aux corps ; quel que soit le système qu'on adopte pour expliquer les phénomènes de la physique, de la chimie, ce qu'il y a de certain, c'est qu'on ne connaît pas exactement l'intensité avec laquelle les forces supposées agissent suivant les cas très-divers, les circonstances très-variables où paraissent se trouver les corps considérés en eux-mêmes, dans leur constitution même,

(1) Dans la réalité, nulle action n'est possible, rien ne change, rien ne dure (voir à ce sujet l'*Exposé de mon système philosophique* ou l'introduction de mes *Discussions sur les principes de la physique*.)

et aussi par rapport aux milieux où ils sont ; et faute de cette connaissance exacte, il nous est impossible de fonder la mécanique sur des bases certaines, prises dans la nature même. Ainsi, par exemple, comment préciser, calculer les effets qui se produiront quand un corps sera choqué par un autre, quand un corps sera soumis à des forces appliquées à un de ses points ou a plusieurs de ses points ? quelle sera l'influence de ces actions sur les autres molécules ? comment, notamment, déterminer les effets des forces appliquées à un levier, et généralement les effets de l'application des forces à des corps quelconques ?

Si, pour écarter, autant que possible, ces difficultés, on suppose que les corps, sur lesquels s'exercent les actions considérées, sont inflexibles, inextensibles, de forme invariable, on tombe dans des impossibilités d'une autre nature, ou l'on arrive logiquement à des conséquences qui excluent les principes admis en mécanique.

Supposons, par exemple, qu'un corps soit absolument inextensible, comme s'il était d'une seule masse continue; dans cette hypothèse, la raison dit qu'il ne pourra se mouvoir que parallèlement à telle ou telle direction donnée, qu'il ne pourra tourner sur lui-même, sur son centre ou sur un autre point; elle voit aussi que la résultante de toutes les forces qui pourront lui être appliquées sera à un point quelconque de sa masse, et non pas seulement au point déterminé suivant les règles

admises par la mécanique. La grandeur de la résultante sera d'ailleurs bien différente de celle qu'on trouve par l'application de ces règles. Les théories du levier, du centre de gravité, du pendule, s'évanouiront, et généralement crouleront les principes et les solutions de la Mécanique.

De toute manière donc une science théorique et rationnelle de la Mécanique est impossible; et je pense qu'il vaudrait mieux se borner à présenter et ordonner les faits, les phénomènes relatifs à cette science, que de faire des théories appuyées sur des principes faux, sur des démonstrations qui croulent avec ces principes.

Il est une école qui prétend que la Mécanique n'a pas besoin de considérer des forces. Cette doctrine remonte au moins à d'Alembert qui, dans la préface de la première édition de son *Traité de dynamique*, p. 15, écrivait les lignes suivantes :

« Tout ce que nous voyons bien distinctement dans le mouvement d'un corps, c'est qu'il parcourt un certain espace, et qu'il emploie un certain temps à le parcourir; *c'est donc de cette seule idée qu'on doit tirer tous les principes de la Mécanique quand on veut les démontrer d'une manière nette et précise*. Aussi ne sera-t-on pas surpris qu'en considération de cette réflexion, j'ai, pour ainsi dire, détourné la vue de dessus les causes motrices pour n'envisager uniquement que le mouvement qu'elles produisent. »

Pour L. J. du Buat, les forces accélératrices sont de simples accroissements de vitesses, et les forces motrices des produits de ces accroissements par les masses. Il professe que la Mécanique ne considère et ne mesure les forces que dans leurs effets, qui sont des vitesses imprimées à des masses ; que l'équilibre n'est que le cas particulier où les vitesses ne produisent pas de mouvement, et que c'est par conséquent pour abréger l'expression, que l'on donne à l'effet le nom de la cause.... »

« Dans le fait, dit M. Barré de Saint-Venant, quel que soit un problème de mécanique terrestre ou céleste proposé, les forces n'entrent jamais ni dans les données, ni dans le résultat cherché de la solution. On les fait intervenir pour résoudre, et on les élimine ensuite, afin de n'avoir finalement que du temps, ou des distances, ou des vitesses, comme en commençant. On conçoit très-bien qu'un jour, à la place de ces sortes d'intermédiaires d'une nature occulte et métaphysique, on puisse n'introduire et n'invoquer pour la solution des divers problèmes de l'ordre physique, que ces lois avérées des vitesses et de leurs changements suivant les circonstances, lois dont on ferait l'application, comme un juge, à l'espèce, c'est-à-dire aux données de chaque problème, et dont on calculerait pour chaque cas l'accomplissement. Ce ne sera pas bouleverser la science, ce ne sera qu'en modifier le langage... »

J'accorde que tout ce que nous voyons bien distinctement dans le mouvement d'un corps, c'est qu'il parcourt un certain espace et qu'il emploie un certain temps à le parcourir; mais il ne s'ensuit pas que ce soit de cette seule idée qu'on doive tirer tous les principes de la Mécanique.

Il n'est pas exact que les forces accélératrices soient de simples accroissements de vitesses, et les forces motrices des produits de ces accroissements par les masses. La Mécanique ne peut se faire sans qu'on y apporte l'idée de quelque force, de quelque cause de mouvement. Supposez que, au lieu du mot *force*, on emploie le mot *vitesse*; que, par exemple, au lieu de dire : *deux forces égales et contraires appliquées à un même point sont en équilibre*, on dise : *deux vitesses égales et contraires appliquées à un même point sont en équilibre*, ou, ce qui reviendrait au même : *un point uniquement animé de deux vitesses égales et contraires demeure en repos* : il est évident que ces propositions impliquent l'idée de forces, de causes de mouvements. Ici, en effet, le mot *vitesse* ne peut signifier simplement l'intensité d'un mouvement effectif; car un même point ne peut avoir à la fois deux vitesses, deux mouvements réels : vitesse signifie donc, en ce cas, une tendance au mouvement, une cause tendant à mouvoir, qui mouvrait si une cause contraire n'agissait en même temps.

Ampère a divisé la Mécanique en trois branches dis-

tinctes : la *statique*, science de l'équilibre des forces, abstraction faite du déplacement réel dans l'espace, mais sans exclure la tendance au mouvement ; la *cinématique*, science du mouvement, abstraction faite des forces ; la *dynamique*, science des rapports des forces avec les déplacements et les vitesses qu'elles déterminent dans l'espace et dans le temps ou réciproquement.

On a beaucoup discuté sur la question de savoir dans quel ordre doit se faire l'exposition de la Mécanique. Les uns veulent que l'on commence par la statique, d'autres par la cinématique ou la dynamique. Pour moi, j'avoue que j'attache peu d'importance à cette question, dont la solution, je crois, est subordonnée au système de Mécanique adopté : tel système, telle méthode, peut s'exposer plus aisément, avec plus de clarté, d'enchaînement, en commençant par la statique, tandis que le contraire peut avoir lieu pour une autre méthode, pour un autre système.

Au reste, il serait difficile, sinon impossible, de mettre une ligne de démarcation absolue entre les diverses parties de cette science, d'exposer l'une en faisant complétement abstraction des autres. Il est certain que jusqu'ici l'on ne les a pas complétement séparées dans leur exposition. Ainsi, par exemple, les théorèmes qui ont pour objet la composition et la décomposition des forces se trouvent classés dans la statique, et l'on ne peut pas dire qu'il n'y a là que des questions d'équilibre.

Quoi qu'il en soit, je ne me préoccuperai pas de cette question dans l'exposé des discussions que je présenterai dans ce livre. Je m'attacherai seulement à les produire suivant l'ordre qui me paraîtra le plus susceptible de mettre la vérité en lumière.

Comme un grand nombre de solutions relatives à la mécanique ont été obtenues par l'application du calcul infinitésimal, je crois devoir discuter ici la question, controversée encore, de savoir si ce calcul est exact, si ses résultats peuvent être regardés comme absolument justes.

J'ai déjà émis et motivé mon opinion sur ce point dans un livre intitulé : *Exposé des vrais principes des mathématiques*, chap. X, § III, p. 294 (1) :

« Cette méthode (celle des infiniment petits), ai-je dit, a été en butte à des reproches bien mérités. Toutefois, c'est en général avec timidité, avec réserve, qu'on a contesté la légitimité de cette monstrueuse théorie. La plupart des mathématiciens qui l'ont jugée, se sont bornés à dire que l'hypothèse d'infiniment petits, et surtout d'infiniment petits de différents ordres était *difficile à admettre*, *répugnait à l'esprit*, était *bien dure pour des oreilles mathématiques*. Ce qui a contenu la critique que devait susciter une telle méthode, c'est que, par elle, on arrive à des résultats vrais, ou qui étaient

(1) Un vol. in-8, chez Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55, Paris.

considérés comme tels, même avant cette ingénieuse création. Les mathématiciens semblent n'avoir pu s'arrêter à l'idée que des règles fausses pussent logiquement conduire à des vérités, à des conclusions acceptées par la raison. Et puis, la méthode des infiniment petits est d'une application commode et prompte : c'était encore un motif pour la défendre ou l'épargner. On s'explique donc le doute ou le silence où se sont retranchés bien des mathématiciens au sujet de la légitimité des infiniment petits et de leur application aux calculs différentiel et intégral.

» Les infiniment petits de Leibnitz ont trouvé de fermes défenseurs. Plusieurs géomètres ont considéré comme rationnel ce système incroyable. On a voulu justifier l'infiniment petit, l'infiniment petit relatif, tel que l'admet la méthode Leibnitienne, ou tenté de le rendre plus acceptable.

» Boucharlat, dans son *Traité de calcul différentiel*, a entrepris de *donner pour base à la méthode des infiniment petits un autre principe qui*, dit-il, *également fondé sur les notions que nous avons de l'infini, satisfait plus la raison par l'idée de limite qu'il renferme tacitement.*

« Voici comment il s'exprime, page 162, pour établir cet autre principe qu'il a promis :

« Les notions que nous avons de l'infini se réduisent » à cette proposition : Une quantité n'est pas infinie » lorsqu'elle est susceptible d'augmentation. Par consé-

» quent, si l'on a $x+a$, et que x devienne infini, il faut
» supprimer a, autrement ce serait supposer que x peut
» encore s'augmenter de a, ce qui est contre notre dé-
» finition.

» Cette proposition étant fondamentale, j'ai cherché
» à la démontrer d'une manière plus satisfaisante,
» comme il suit : soit l'équation.

$$(149)\quad x+a=y,$$

» dans laquelle a est une quantité constante. Nous
» pouvons, à l'aide d'une indéterminée m, représenter
» par ma le rapport des variables y et x, ou, ce qui
» revient au même, supposer

$$(150)\quad max=y,$$

» substituant cette valeur dans l'équation (149) on
» obtient :

$$(151)\quad x+a=max;$$

» divisant tous les termes de l'équation (151) par ax,
» on a :

$$(152)\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{x}=m;$$

» quand x devient infini, la fraction $\frac{1}{x}$ ayant atteint à
» son dernier degré de décroissement, se réduit évi-
» demment à zéro; alors l'équation (152) devient

$$m=\frac{1}{a}.$$

» Cette valeur étant substituée dans l'équation (151),
» on obtient :

$$x + a = x,$$

» ce qui montre que quand x est infini, $x + a$ se ré-
» duit à x. »

» Cette démonstration ne satisfait point ma raison. On voit qu'elle s'appuie sur ce que, quand x devient infini, la fraction $\frac{1}{x}$, ayant atteint son dernier degré de décroissement, se réduit à zéro; ce qui n'est pas, logiquement, rationnellement, acceptable. L'unité, une quantité finie quelconque ne peut être divisée par l'infini; car si l'on suppose au quotient une valeur réelle quelconque, cette valeur, multipliée par l'infini, produira l'infini. Si l'on suppose que le quotient $= o$, alors il faudra qu'une infinité de zéros vaillent l'unité, ou le nombre fini qui est le dividende. La démonstration porte donc sur une hypothèse absurde.

» Au reste, il est inutile de démontrer que l'infini ne saurait s'accroître, que l'infini plus a, quelle que soit la valeur de a, ne vaut que l'infini. Cela est évident par soi-même.

» Partant de cette proposition, que x étant infini, $x + a$ se réduit à x, Boucharlat dit que la quantité a, à l'égard de laquelle x est infini, est ce qu'on appelle un infiniment petit par rapport à x. Puis, alléguant que l'on ne considère ici que les *rapports des quantités*, il

étend le bénéfice de sa démonstration au cas même ou x a une *valeur finie*, pourvu seulement, ajoute-t-il, que a soit infiniment petit par rapport à x.

» Il est certain qu'une quantité n'est petite ou grande que relativement à quelque autre à laquelle on la compare. En soi, une quantité n'est ni petite ni grande ; mais il ne s'ensuit point qu'une quantité puisse être infiniment petite relativement à une autre quantité.

» J'accorde que si l'infini était possible, admissible rationnellement, on pourrait dire que toute quantité finie est infiniment petite relativement à cette quantité infinie : on le dirait en ce sens que, si grande que fût une quantité finie, elle serait comprise une infinité de fois dans l'infini, conséquemment tout autant de fois que le serait une quantité aussi petite qu'on voudrait la supposer. Cependant on ne peut pas en conclure qu'une quantité finie est nulle, est zéro relativement à l'infini ; car prenez une infinité de fois le nombre fini, si petit qu'il soit, et vous aurez l'infini ; mais supposez zéro pris une infinité de fois, et le résultat sera zéro. Le fini ne serait donc pas nul par rapport à l'infini ; on pourrait le considérer comme un élément de l'infini, comme un élément qui, relativement, serait infiniment petit.

» Mais de là à la supposition d'un infiniment petit relativement à une quantité finie, à une quantité non infiniment grande, il y a un abîme.

» La raison proclame qu'un infiniment petit n'est

possible à aucun égard ; que toute quantité finie étant divisible, on peut toujours en supposer une plus petite qu'elle. En admettant l'infiniment petit, il serait absurde d'admettre des infiniment petits de divers ordres, des infiniment petits d'infiniment petits. Dire que telle quantité *b* est infiniment petite relativement à *a*, c'est dire que *b* a le dernier degré de petitesse relativement à *a* ; mais comment supposer cela, si on suppose qu'une autre quantité *c* est infiniment petite par rapport à *b* ? Il y a ici une contradiction palpable. Évidemment, si *c* est infiniment plus petit que *b*, *b* n'est pas le dernier degré de petitesse relativement à *a*. Cette contradiction serait manifeste alors même qu'on traduirait l'idée d'infiniment petit par celle de quantité moindre que toute quantité assignable.

» Boucharlat, pour justifier la doctrine, invoque la théorie des fractions, où il croit trouver un appui : « Si, » dit-il, on compare la quantité finie *b* à la fraction $\frac{b}{z}$, il est certain que plus le dénominateur *z* » augmentera, plus la fraction diminuera; de sorte » que, quand *z* deviendra infini, cette fraction de- » viendra *absolument nulle*, et, comme telle, devra » être supprimée devant *b*, qui alors sera infini à » l'égard de $\frac{b}{z}$. »

» Cette preuve croule en présence de ce que j'ai dit

tout à l'heure de l'absurdité d'une quantité finie divisée par l'infini. Je répète d'ailleurs que si une telle division était admissible, le quotient ne pourrait être nul, car, encore une fois, zéro multiplié par l'infini ne peut produire une quantité réelle b.

» L'auteur invoque les fractions en faveur des infiniment petits; moi, je les invoque contre cette fausse théorie, à un point de vue opposé. —Je dis : Si l'on compare la quantité b à la fraction $\frac{b}{z}$, il est certain que plus le dénominateur augmentera, plus la fraction diminuera, et que ce dénominateur pourra augmenter toujours sans jamais arriver à l'infini; donc il n'y a pas de terme à la diminution possible de $\frac{b}{z}$; donc l'infiniment petit relatif au fini est une chimère.

» Il n'y a pas d'infiniment petit relatif; il ne pourrait y en avoir que relativement à l'infini dans le sens que j'ai indiqué, et l'infini lui-même est impossible.

» Remarquons que si, un instant, l'on dévorait l'impossibilité d'une quantité divisée par l'infini, et que l'on consentît à croire que $\frac{b}{\infty} = 0$, il s'ensuivrait que $\frac{b}{\infty}$ est nul, *absolument nul*, et conséquemment l'est relativement à toute quantité. — Comment donc, si une quantité quelconque divisée par ∞ est égale à 0, et exprime une quantité infiniment petite quelconque, comment admettre des infiniment petits relatifs de di-

vers ordres? Est-ce que *zéro* peut être un infiniment petit relativement à *zéro?* Non certes! car $0 = 0$. Encore ici la logique est en défaut, d'autant plus en défaut que l'auteur dit que, *quand* z *deviendra infini*, la fraction $\frac{b}{z}$ deviendra *absolument nulle*, bien qu'il la regarde comme un infiniment petit *relatif* à b : ce qui implique contradiction.

» Rien ne peut justifier les principes de la méthode dont je m'occupe. Ils sont faux, manifestement contraires à la raison. Cette méthode ne vaut rien comme théorie, comme démonstration du calcul différentiel et du calcul intégral. Elle conduit à des vérités, mais cela ne prouve point la justesse de ses principes. Elle est, en certains cas, plus expéditive que celle des limites : je conçois qu'on l'applique alors, mais il faut toujours la rejeter, la condamner au point de vue doctrinal.

» On dit qu'elle n'est qu'une abréviation de celle des limites. J'accorde qu'elle peut être plus prompte que celle-ci ; mais de ces deux méthodes, l'une est fausse, l'autre est rationnelle, et elles procèdent par des voies très-différentes.

» Si l'on veut, par exemple, trouver, par la méthode des infiniment petits, la différentielle de x^3, dx étant la différentielle de x, que fait-on alors? On retranche x^3 de $(x + dx)^3$ développé, et l'on a, après la soustraction, $3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$; puis, l'on raisonne

ainsi : dx^3, étant un infiniment petit du troisième ordre, ne peut augmenter $3xdx^2$, il faut donc effacer dx^3; $3xdx^2$, étant un infiniment petit du second ordre, doit être aussi effacé, parce que $3x^2dx$ en est un de premier ordre : la différentielle de x^3 est donc réduite à $3x^2dx$, résultat conforme à celui que donne la théorie des limites; mais cette théorie est loin de procéder comme la méthode des infiniment petits.

» Il est visible que, dans l'application de la méthode infinitésimale, on est obligé de considérer les grandeurs, les quantités ou figures, comme formées d'infiniment petits d'un ou de plusieurs ordres. ».

Poisson croyait à la réalité de l'infiniment petit. Dans l'introduction de son *Traité de mécanique*, 2e édition, p. 14, je lis ce qui suit :

« Un *infiniment petit* est une grandeur moindre que toute grandeur donnée de la même nature.

» On est conduit nécessairement à l'idée des infiniment petits, lorsque l'on considère les variations successives d'une grandeur soumise à la loi de continuité. Ainsi le temps croît par des degrés moindres qu'aucun intervalle qu'on puisse assigner, quelque petit qu'il soit. Les espaces parcourus par les différents points d'un corps, croissent aussi par des infiniment petits; car chaque point ne peut aller d'une position à une autre, sans traverser toutes les positions intermédiaires; et l'on ne pourrait assigner aucune distance, aussi petite

que l'on voudra, entre deux positions successives. *Les infiniment petits ont donc une existence réelle*, et ne sont pas seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres.

» Un infiniment petit peut être double, triple, quadruple....., d'un autre : les quantités infiniment petites ont entre elles des rapports quelconques, dont la détermination est un objet essentiel de l'analyse infinitésimale.

» Si a et b sont des infiniment petits, et que le rapport de b à a soit aussi infiniment petit, b est ce qu'on appelle un infiniment petit de second ordre. Par exemple, la corde d'un arc de cercle étant supposée infiniment petite, le sinus verse du même arc est un infiniment petit du second ordre, puisque le rapport du sinus verse à la corde est toujours le même que celui de la corde au diamètre, et devient, par conséquent, infiniment petit en même temps que le second rapport.

» De même b étant un infiniment petit du second ordre, si l'on suppose que le rapport de c à b soit un infiniment petit de premier ordre, on appellera c un infiniment petit du troisième ordre, et ainsi de suite.

» Il suit de là qu'un produit composé d'un nombre n de facteurs infiniment petits du premier ordre, devra être rangé dans la classe des infiniment petits de l'ordre n.

» L'aire d'une surface infiniment petite dans toutes ses dimensions est au moins un infiniment petit du

second ordre; car elle est moindre que le carré de la droite la plus longue qu'on puisse mener d'un point à un autre de son contour, laquelle droite est infiniment petite, par hypothèse. On verra de même qu'un volume, dont toutes les dimensions sont infiniment petites, est au moins un infiniment petit du troisième ordre, puisqu'il est moindre que le cube de la plus longue droite menée d'un point à un autre de sa superficie.

» Cela posé, le principe fondamental de l'analyse infinitésimale consiste en ce que deux quantités finies, qui ne diffèrent l'une de l'autre que d'un infiniment petit, doivent être regardées comme égales, puisqu'on ne saurait assigner entre elles aucune inégalité, aussi petite que l'on voudra.

» Il en sera de même à l'égard de deux quantités infiniment petites du premier ordre, et généralement, à l'égard de deux infiniment petits d'un ordre quelconque, qui ne diffèrent, l'un de l'autre que d'un infiniment petit d'un ordre supérieur : on les considérera comme des quantités rigoureusement égales, et leur rapport comme égal à l'unité.

» On énonce encore ce principe d'une autre manière, en disant qu'il est permis de négliger dans un calcul, sans crainte d'altérer aucunement les résultats, soit les infiniment petits ajoutés à des quantités finies, soit les quantités infiniment petites d'un ordre quelconque, ajoutées à des quantités d'un ordre inférieur. »

Je maintiens qu'il n'y a point quelque chose qui soit infiniment petit. Le temps ne croît pas par des intervalles infiniment petits; un temps donné, une durée limitée quelconque est divisible par la pensée en parties qui seront d'autant plus petites qu'on en concevra d'avantage dans cette durée, mais il est impossible d'arriver à une division telle que les parties conçues soient infiniment petites, soient les derniers termes de petitesse possible. Ainsi des espaces parcourus. Poisson, comme bien d'autres, tombe ici dans une grande confusion d'idées.

Pourquoi Poisson dit-il que le rapport du sinus verse à la corde est toujours le même que celui de la corde au diamètre? Cela n'est point exact, car la corde peut être égale au diamètre et, en ce cas, le sinus verse n'est égal qu'au demi-diamètre.

De deux choses l'une, ou l'infiniment petit n'est rien, ou il est quelque chose. S'il est quelque chose, on ne peut pas admettre que deux quantités quelconques finies, qui ne diffèrent l'une de l'autre que d'un infiniment petit, soient exactement égales.

Tout infini est impossible, aussi bien l'infiniment grand que l'infiniment petit. J'ai, ailleurs (1), signalé les absurdités où conduisent l'hypothèse d'un espace fini composé de parties essentiellement indivisibles; et

(1) *Exposé d'un système philosophique*, p. 302.

pourtant un élément d'espace ne pourrait être infiniment petit qu'à la condition d'être indivisible. Ainsi de la durée. J'ai aussi montré les anomalies où mènerait l'hypothèse d'une quantité infinie (2).

Galilée a cru démontrer l'impossibilité d'un nombre infini, d'une quantité infinie d'êtres où objets, par le raisonnement suivant : « Si l'on considère la série des nombres carrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc..., dans la série naturelle des nombres entiers, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc..., l'on voit que plus est grande la série de ces dernières, plus les nombres carrés s'y trouvent *proportionnellement* en minorité. Si, par exemple, l'on arrête la suite après le nombre 10, après le nombre 100, après le nombre 1000, le nombre des carrés qu'elle renfermera sera 3 dans le premier cas, 10 dans le second, 31 dans le troisième. Par conséquent, le rapport entre le nombre des termes carrés, et le nombre total des termes deviendra successivement $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{31}{1000}$, ou environ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{100}$. L'on doit en conclure que si la suite des nombres entiers pouvait être supposée actuellement prolongée à l'infini, les termes carrés y seraient en très-grande minorité. Or cette dernière condition qui devrait être satisfaite dans l'hypothèse dont il s'agit, est pourtant incompatible avec cette même hypothèse, car dans la suite des nombres entiers actuellement prolongée à l'in-

(2) *Exposé des vrais principes des mathématiques*, p. 201.

fini, se trouverait, avec chaque terme non carré, le carré de ce terme, puis le carré du carré, etc., par conséquent une série infinie de termes carrés. Donc, puisque l'hypothèse de la suite prolongée à l'infini entraîne une contradiction manifeste, cette hypothèse doit être rejetée. »

Ce raisonnement de Galilée est sophistique. Bien que plus on multipliera le nombre des termes de la série *limitée* des nombres entiers 1, 2, 3, etc., plus sera petit le rapport entre le nombre des termes carrés et le nombre total des termes de la série naturelle qui les contiendra, il n'en est pas moins vrai que si la série des nombres entiers était infinie, elle contiendrait un nombre infini de termes carrés. Seulement l'accroissement des termes carrés serait plus lent que celui des nombres entiers; les carrés se trouveraient à des distances de plus en plus grandes les uns des autres, mais cela n'exclurait pas l'infinité de leur nombre dans la série supposée infinie des termes. La contradiction alléguée par Galilée n'est donc pas réelle. Ce qui est faux, évidemment inadmissible, c'est l'hypothèse d'un nombre infini, d'une quantité infinie d'unités, d'objets quelconques; mais si l'on a le courage d'admettre cette hypothèse, il ne doit pas coûter d'admettre une infinité de nombres carrés, malgré l'argumentation de Galilée.

Revenons aux infiniment petits.

Plusieurs mathématiciens, en reconnaissant que l'in-

finiment petit n'a aucune réalité, qu'une telle entité est repoussée par la raison, ont néanmoins soutenu l'exactitude de la méthode et de ses résultats.

C'est, notamment, ce qu'a fait Carnot dans un écrit intitulé : *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal.*

Carnot s'attache à établir que le calcul, en certains cas du moins, conduit à des résultats parfaitement exacts. Il n'a pas de peine à montrer qu'il en est ainsi dans l'emploi de ce procédé pour déterminer les tangentes.

« Par exemple, dit-il, page 9, soit proposé de mener une tangente au point donné M de la circonférence MBD (fig. 1), soient C le centre du cercle, DCB l'axe; supposons l'abscisse OP $= x$, l'ordonnée correspondante MP $= y$, et soit TP la sous-tangente cherchée. Pour la trouver, considérons le cercle comme un polygone d'un très-grand nombre de côtés; soit MN un de ces côtés; prolongeons-le jusqu'à l'axe : ce sera évidemment la tangente en question, puisque cette ligne ne pénétrera pas dans l'intérieur du polygone; abaissons de plus la perpendiculaire MO sur NQ, parallèle à MP, et nommons a le rayon du cercle : cela posé, nous aurons évidemment

$$\mathrm{MO} : \mathrm{NO} :: \mathrm{TP} : \mathrm{MP}, \text{ ou } \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{NO}} = \frac{\mathrm{TP}}{y}.$$

» D'une autre part, l'équation de la courbe étant

pour le point M, $yy = 2ax - xx$, elle sera pour le point N

$$(y + NO)^2 = 2a\,(x + MO) - (x + MO)^2;$$

ôtant de cette équation la première, trouvée pour le point M, et réduisant, on a

$$\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO};$$

égalant donc cette valeur de $\frac{MO}{NO}$ à celle qui a été trouvée ci-dessus, et multipliant par y, il vient

$$TP = \frac{y\,(2y + NO)}{2a - 2x - MO}.$$

» Si donc MO et NO étaient connues, on aurait la valeur cherchée de TP; or ces quantités MO, NO sont très-petites, puisqu'elles sont moindres chacune que le côté MN, qui, par hypothèse, est lui-même très-petit. Donc on peut négliger sans erreur sensible ces quantités par comparaison aux quantités $2y$ et $2x - 2a$ auxquelles elles sont ajoutées. Donc l'équation se réduit à $TP = \frac{y2}{a - x}$, ce qu'il fallait trouver. »

L'auteur assure ensuite que non-seulement ce résultat approche beaucoup du vrai, mais qu'il est réellement de la plus parfaite exactitude; c'est, dit-il, une chose dont il est aisé de s'assurer en cherchant TP, d'après

ce principe que la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon ; car il est visible que les triangles semblables CPM, MPT donnent CP : MP :: MP : TP ; d'où l'on tire $TP = \frac{MP^2}{CP} = \frac{y^2}{a - x}$ comme ci-dessus.

« Or, ajoute-t-il plus loin, on peut se rendre fort simplement raison de ce qui est arrivé dans la solution du problème traité ci-dessus, en remarquant que l'hypothèse d'où l'on est parti étant fausse, puisqu'il est absolument impossible qu'un cercle puisse être jamais considéré comme un vrai polygone, quel que puisse être le nombre de ces côtés, il a dû résulter de cette hypothèse une erreur quelconque dans l'équation

$$TP = \frac{y\,(2y + NO)}{2a - 2x - MO},$$

et que le résultat $TP = \frac{y^2}{a - x}$ étant néanmoins certainement exact, comme on le prouve par la comparaison des deux triangles CPM, MPT, on a pu négliger MO et NO dans la première équation, et même on a dû le faire pour rectifier le calcul, et détruire l'erreur à laquelle avait donné lieu la fausse hypothèse d'où l'on était parti. Négliger les quantités de cette nature est donc non-seulement permis en pareil cas, mais il le faut, et c'est la seule manière d'exprimer exactement les conditions du problème.

« Le résultat exact TP $= \frac{y^2}{a - x}$ n'a donc été obtenu que par une compensation d'erreurs..... »

L'auteur tâche ensuite de donner à ces idées plus de précision.

Il appelle *quantité infiniment petite* toute quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement, qu'elle puisse être rendue aussi petite qu'on le veut, sans qu'on soit obligé pour cela de faire varier celle dont on cherche la résolution.

« L'unité, divisée par une quantité infiniment petite est, dit-il, ce qu'on nomme *quantité infinie* ou *infiniment grande*. On comprend sous le nom de *quantités infinitésimales*, les quantités infinies et celles qui sont infiniment petites.

» *L'analyse infinitésimale* n'est autre chose que l'art d'employer auxiliairement les quantités infinitésimales, pour découvrir les relations qui existent entre des quantités proposées.

» En leur qualité de simples auxiliaires, toutes les quantités dites infinitésimales et leurs fonctions quelconques doivent se trouver exclues des résultats du calcul..... Les quantités appelées *infiniment petites* ne sont pas des quantités actuellement nulles, ni même des quantités actuellement moindres que telles ou telles grandeurs déterminées, mais seulement des quantités auxquelles les conditions de la question proposée, et les

hypothèses sur lesquelles le calcul est établi, permettent de demeurer variables jusqu'à ce que le calcul soit entièrement achevé, en décroissant continuellement, jusqu'à devenir aussi petites qu'on le veut, sans que l'on soit obligé de changer en même temps les valeurs de celles dont on veut obtenir la relation.....

» Deux quantités quelconques sont dites infiniment peu différentes l'une de l'autre, lorsque le quotient de l'une par l'autre ne diffère de l'unité que par une quantité infiniment petite.

» On dit qu'une quantité est *infiniment petite relativement* à une autre quantité, lorsque le quotient de la première par la seconde est une quantité infiniment petite, et réciproquement alors la seconde est dite infinie ou infiniment grande relativement à la première.

» On voit par là qu'une quantité même infiniment petite peut se trouver infiniment grande *relativement* à telle autre quantité ; et que réciproquement une quantité, même infiniment grande, peut se trouver infiniment petite relativement à telle autre. Car si l'on suppose que x, par exemple, soit une quantité infiniment petite, x^2 sera une quantité infiniment petite relativement à la première, quoique cette première soit infiniment petite elle-même, puisque le rapport de la seconde à la première est x, qui par hypothèse est une quantité infiniment petite. Pareillement, si X représente une quantité infiniment grande, elle n'en sera pas moins infiniment

petite relativement à X^2, puisque le quotient de celle-ci par la première sera X, qui par hypothèse est une quantité infinie. »

Cette observation, suivant l'auteur, donne lieu de distinguer les quantités infinitésimales en différents ordres.

Plus bas, Carnot pose ce principe fondamental : *Deux quantités non arbitraires sont rigoureusement égales entre elles, du moment que leur différence prétendue peut être supposée aussi petite qu'on le veut.* De ce principe, et du corollaire qu'il en tire, découle, selon Carnot, toute la théorie de l'analyse infinitésimale.

« Leibnitz, dit-il, qui le premier démontra les règles du calcul intégral, l'établit sur ce principe : qu'on peut prendre à volonté l'une pour l'autre deux grandeurs finies qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite. Ce principe avait l'avantage d'une extrême simplicité et d'une application très-facile. Il fut adopté comme une espèce d'axiome, et l'on se contenta de regarder ces quantités infiniment petites comme des quantités moindres que toutes celles qui peuvent être appréciées ou saisies par l'imagination. »

On voit que cette manière de considérer l'infiniment petit n'est point précisément celle qui est proposée par Carnot.

Sa doctrine qui, du moins dans ses points principaux, avait été émise par Lagrange, ne me paraît pas soutenable.

Il y a ici deux questions : 1° la méthode des infini-

ment petits donne-t-elle des résultats exacts; 2° est-elle rationnelle, exacte en soi?

Or j'accorde que, dans beaucoup de cas, les résultats obtenus par l'application de la méthode infinitésimale sont justes, vrais, mais je soutiens que, considérée en soi, elle n'est point rationnelle.

Carnot avoue qu'elle emploie des quantités auxiliaires qui ne peuvent exister, doivent disparaître dans le résultat obtenu, et il assure que les erreurs qui proviendraient de cet emploi sont compensées dans le calcul de manière à disparaître complétement. Mais ce n'est pas dans le calcul même qu'il voit que cette compensation doit s'opérer; il voit cela en considérant que, dans certains cas, par des méthodes rationnelles, on arrive à des solutions semblables à celles obtenues par la méthode des infiniment petits. Cette méthode, par elle-même, est donc, rationnellement, insuffisante, défectueuse. D'ailleurs les raisonnements de Carnot ne montrent pas que, dans tous les cas, cette compensation exacte qu'il invoque doit s'établir; et nous verrons que fort souvent elle est inadmissible, chimérique, que l'on a fréquemment abusé du calcul en question.

Je conteste ce principe émis par Carnot, que *deux quantités non arbitraires sont rigoureusement égales entre elles, du moment que leur différence prétendue peut être supposée aussi petite qu'on le veut.*

Il y a là un sophisme. Il est évident que si deux

quantités ne sont pas arbitraires, elles ne peuvent pas différer d'une quantité arbitraire; mais je ne peux pas accorder que si, deux quantités diffèrent l'une de l'autre, si peu que ce soit, elles sont égales. On émet une fausse proposition en disant que deux quantités non arbitraires diffèrent d'une quantité supposée aussi petite qu'on voudra, mais on ne serait pas fondé à dire que ces quantités présentées comme différant d'une quantité arbitraire sont égales.

Carnot, à l'appui de sa doctrine, présente divers problèmes qu'il résout ou croit résoudre d'après les principes qu'il a émis. Ainsi, par exemple, pour prouver que *deux pyramides* de mêmes bases et de même hauteur sont égales en volume, il raisonne ainsi :

« Concevons les deux pyramides proposées partagées en un même nombre de tranches infiniment minces parallèlement à leurs bases, et d'épaisseurs respectivement égales. Comparons deux des tranches correspondantes, prises l'une dans la première et l'autre dans la seconde de ces pyramides. Or, je dis d'abord que ces deux tranches ne peuvent différer qu'infiniment peu l'une de l'autre.

» En effet chacune de ces tranches est elle-même une pyramide tronquée, et si de tous les angles de la plus petite de ses deux bases on conçoit des parallèles qui aillent rencontrer la plus grande, il est clair que le tronc de pyramide se trouvera décomposé en deux parties,

l'une prismatique, comprise entre ces parallèles, ayant pour épaisseur la distance des deux bases du tronc, et pour base la plus petite des deux de ce même tronc; l'autre en forme d'onglet, ayant aussi pour épaisseur la distance des deux bases du tronc, et pour base la différence entre la plus grande et la plus petite de ce même tronc. Mais ces deux dernières bases pouvant se rapprocher l'une de l'autre autant qu'on le veut, leur différence peut évidemment être rendue aussi petite qu'on le veut relativement à chacune d'elles. Donc l'onglet est lui-même infiniment petit relativement à la tranche à laquelle il appartient.

» Cela posé, nommons T et T′ les volumes des deux tranches correspondantes dans les deux pyramides, p et p' les portions prismatiques, q et q' les onglets, nous aurons les deux équations exactes

$$T=p+q,\ T'=p'+q', \text{ ou } p=T-q,\ p'=T'-q':$$

mais p et p' sont des prismes de mêmes bases et de même hauteur; donc on a $p=p'$; égalant donc leurs valeurs, on aura $T-q=T'-q'$; négligeant q et q', que nous venons de voir être infiniment petits relativement à T et T′, on aura $T=T'$.

» Comme cette équation n'est pas dégagée de l'infini, nous ne pouvons encore savoir si elle est exacte ou seulement imparfaite; mais comme on peut appliquer à toutes les tranches qui composent les pyramides entières

ce que nous venons de dire de deux d'entre elles, il suit qu'en nommant p et p', les volumes entiers des deux pyramides, on aura $p=p'$. Or ces deux volumes des pyramides entières sont des quantités fixes. Donc l'équation $P=P'$ est entièrement dégagée de toute considération de l'infini. Donc elle est nécessairement et rigoureusement exacte. »

Je signale cette prétendue démonstration comme évidemment entachée de sophisme, comme sans aucune valeur.

Supposez qu'il ne soit pas vrai que deux pyramides de mêmes bases et de même hauteur soient égales en volume. Plus les tranches parallèles à leurs bases considérées dans chacune seront minces, néanmoins, plus ces tranches seront près de s'égaler en volumes, dans l'hypothèse, et aussi plus seront petits et près de s'égaler les onglets q et q' restant en dehors des portions prismatiques p et p'; mais puisque cela serait vrai alors même que la proposition qu'il sagit de démontrer ne serait pas fondée, la démonstration croule sous le sophisme au moyen duquel on l'a édifiée et l'on y voit l'abus qu'on peut faire d'un faux principe, celui que j'ai rejeté plus haut.

Carnot n'est pas plus heureux dans la démonstration de quelques autres problèmes qu'il veut résoudre d'après le même principe. Je citerai notamment celle qu'il présente pour prouver que *l'aire d'une zone sphérique est*

égale à l'aire de la portion correspondante du cylindre qui lui est circonscrit.

Par la méthode des limites et celle des fonctions analytiques de Lagrange, on peut obtenir *rationnellement* des solutions vraies : je l'ai suffisamment montré dans l'*Exposé des vrais principes des mathématiques;* on peut aussi obtenir des solutions vraies par la méthode infinitésimale, mais *non rationnellement.*

Au reste, les solutions auxquelles a conduit le calcul différentiel et intégral, par une méthode quelconque, sont généralement fausses, impossibles.

Cette fausseté m'apparaît, notamment, dans tous les cas où la solution suppose, implique des rapports de quantité entre des courbes et des droites, ou entre des courbes de différentes courbures. Or on sait que c'est principalement à des spéculations de cet ordre qu'on applique le calcul différentiel et intégral.

Dans l'ouvrage de mathématiques déjà cité, j'ai soutenu cette thèse que des grandeurs, des quantités *homogènes*, de même nature, peuvent seules avoir entre elles des rapports de degrés ou de quantités.

Il y a, par exemple, une différence essentielle entre une ligne courbe et une ligne droite, et entre des lignes courbes de courbures différentes. Or, ces différences essentielles ne permettent pas d'admettre rationnellement un rapport de quantité entre ces choses. La raison ne peut supposer que ces lignes s'égalent en longueur,

ou que leurs longueurs sont entre elles en une certaine proportion géométrique ou arithmétique.

De même et par la même raison, deux surfaces planes mais terminées l'une par quelque ligne courbe, et l'autre par des lignes droites, ou toutes les deux terminées par des lignes courbes, mais différentes par leur courbure même, ne sauraient avoir entre elles aucun rapport de quantité.

Il faut en dire autant d'une surface plane et d'une surface courbe, ou de surfaces courbes de différentes courbures : point de rapport de quantité entre ces grandeurs essentiellement différentes.

La même impossibilité d'un rapport de quantité existe entre deux solides dont l'un est terminé par une surface courbe et l'autre par une surface plane, ou qui sont compris tous les deux sous des surfaces courbes, mais différentes par leur courbure même.

Ces principes qui, bien que nouveaux (1), me paraissent incontestables, je persiste à les soutenir avec la plus forte conviction. Or ils renversent une grande partie de la géométrie admise et surtout la plus grande partie des spéculations qui font l'objet des hauts calculs.

Pour soutenir logiquement la réalité des rapports de quantité que les géomètres admettent entre des courbes

(1) J'ignore si d'autres, avant moi, les ont exprimés, mais j'affirme que je ne les ai trouvés nulle part, que je les ai spontanément et intuitivement aperçus et reconnus.

et des droites et entre des courbes différentes, on est conduit à considérer les courbes comme formées d'une infinité de petites droites, de droites infiniment petites. Du moins, tous les géomètres auxquels j'ai objecté l'impossibilité de tels rapports, se sont retranchés dans l'hypothèse des infiniment petits, comme éléments des courbes. Ils comprenaient sans doute que, si les courbes ne sont pas telles, il ne saurait y avoir un rapport de quantité entre elles et des droites. Mais il ne paraît point que Carnot ait compris cela. En même temps qu'il nie l'infiniment petit, qu'il soutient qu'une courbe n'est pas un composé de petites droites, si petites qu'on les suppose, *qu'il est absolument impossible qu'un cercle puisse être considéré comme un vrai polygone, quel que puisse être le nombre de ses côtés*, il admet certainement les rapports de quantité que je nie.

Leibnitz, qui croyait à ses *monades*, qui professait que la matière est elle-même formée de substances simples, indivisibles, qui regardait la durée comme un assemblage d'instants indivisibles, pouvait bien croire à la légitimité du calcul infinitésimal ; mais sa métaphysique est repoussée par la raison. Une substance essentiellement indivisible est absolument sans étendue : elle ne peut donc être *nulle part*, car elle ne saurait occuper un lieu, un point quelconque de l'espace. L'étendu ne peut être formé de l'inétendu. Le sommet d'un angle présente un point sans étendue, soit; mais l'idée du

sommet d'un angle n'est pas celle d'une entité réelle, d'une substance; ce n'est qu'une qualité conçue, un attribut. Ainsi de la ligne, de la surface, qui ne sont que des qualités abstraites de l'idée de corps, de matière, et qui ne peuvent être par elles-mêmes.

La question de la validité de la méthode infinitésimale, après avoir longtemps sommeillé, vient d'être réveillée par une polémique entre M. Debacq et divers autres mathématiciens.

Dans le numéro du 14 janvier 1869 des *Mondes* se trouve un article où M. Debacq, pour soutenir les infiniment petits de Leibnitz, émet les deux propositions suivants :

I. Il y a au moins une quantité plus petite que tout nombre rationnel.

II. Il y a autant de quantités plus petites que tout nombre rationnel qu'il y a de nombres rationnels, et elles sont comparables entre elles comme ceux-ci le sont entre eux.

Et, suivant M. Debacq, *ce sont toutes ces quantités qui composent un premier ordre d'infiniment petits.*

A l'appui de sa première proposition, l'auteur raisonne ainsi :

« Il y a au moins une quantité plus petite que tout nombre rationnel. En effet, l'unité une fois déterminée, s'il n'y avait pas une quantité plus petite que tout nombre rationnel, une quantité, tant petite qu'elle soit, se-

rait commensurable. Ce nombre commensurable, ajouté à lui-même, donnerait une somme commensurable. Ce nouveau nombre commensurable augmenté de la première quantité commensurable donnerait une nouvelle somme commensurable, et ainsi de suite; de sorte qu'il n'y aurait plus place dans les quantités croissant d'une manière continue pour les incommensurables. Il n'y aurait que des nombres commensurables; ce qui est faux. »

Je rejette et la première proposition et le raisonnement par lequel l'auteur prétend la démontrer.

Premièrement. Qu'une quantité soit rationnelle ou non, elle ne peut être le dernier degré de petitesse. Il peut y avoir une quantité, rationnelle ou non, plus petite encore, il peut y en avoir une infinité de plus en plus petites. On ne peut donc pas dire qu'il y a une quantité plus petite que tout nombre rationnel. On ne peut pas plus limiter le nombre des quantités rationnelles que celui des quantités irrationnelles, et cela pas plus dans la décroissance que dans l'accroissement des quantités.

L'argumention de l'auteur est sophistique et n'est pas même spécieuse. De ce qu'il n'y a pas une quantité plus petite que tout nombre rationnel, il ne s'ensuit pas qu'une quantité, si petite qu'elle soit, est commensurable. En effet, si petit que soit un nombre rationnel, il peut y en avoir un irrationnel plus petit encore; mais

de même il peut y avoir un nombre rationnel encore plus petit que ce dernier irrationnel. Encore une fois, il n'y a point de limite à la petitesse des nombres ou quantités rationnelles ou irrationnelles ; ce point étant reconnu, et c'est la raison qui le proclame, le raisonnement de M. Debacq tombe, ainsi que tous ceux qu'on a forgés pour soutenir la réalité de l'infiniment petit.

Par les mêmes raisons, la seconde proposition de M. Debacq n'est pas plus juste que la première. Si elle était juste, on pourrait aussi bien, en renversant la proposition, dire qu'il y a autant de quantités rationnelles plus petites que tout nombre irrationnel, qu'il y a de nombres irrationnels.

Après tout, qu'importe donc ici que la quantité soit rationnelle ou ne le soit pas ? Peut-elle être infiniment petite? Non certainement ; arrière donc l'infiniment petit.

D'après cela, je ne crois pas utile de suivre ici M. Debacq dans toutes les phases de son excentrique et indigeste théorie : *indigesta moles*. On la trouvera entière dans les *Mondes*, qui lui ont complaisamment accordé une large place.

M. Debacq attaque, repousse la méthode des limites par l'argumentation si connue qui consiste à dire que, dans cette méthode, on suppose un rapport entre zéro et zéro, entre rien et rien.

Par exemple, en posant $y = x^2$, en donnant ensuite à x un accroissement h et développant, puis exprimant

par y' ce que devient y par suite de l'accroissement de x, on a $y'-y=2xh+h^2$, et en divisant cette égalité par h, il vient

$$\frac{y'-y}{h}=2x+h.$$

A la limite où l'on a $h=o$, cette équation devient

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{o}{o}=2x.$$

Or, dit-on, $\frac{o}{o}$ ne saurait égaler $2x$, car rien ne peut être divisé par rien ; le rapport de o à o est o.

Mais j'ai réfuté cette objection dans mon livre de mathématiques plus haut cité. Je répète ici que le résultat $\frac{o}{o}=2x$ n'est pas absurde. Dans l'acception commune, dans le sens vulgaire du mot *diviser*, ce résultat paraît inadmissible ; on se dit que ce qui n'est pas ne peut pas être divisé, ne peut diviser. Mais il n'en est pas de même si l'on prend *diviser* dans l'acception qui lui est généralement donnée en mathématiques et d'après laquelle la division est une opération ayant pour objet de trouver un nombre qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende. A ce point de vue, en effet, on peut dire que $\frac{o}{o}$ représente généralement toutes sortes de quantités, toutes les valeurs, car une quantité quelconque multipliée par o, qui est ici le diviseur, donne-

rait o, qui est ici le dividende. Ainsi $\frac{o}{o}=2x$. Il est vrai que $\frac{o}{o}$ égalerait aussi o, ou toute autre expression que $2x$, mais enfin on ne commet pas une absurdité mathématique en posant $\frac{o}{o}=2x$. En ce cas, la valeur de $\frac{o}{o}$ se trouve être précisée à $2x$. Dans un autre cas, elle serait différente : ainsi elle serait $=3x^2$, ou $4x^3$, ou $5x^4$, si l'équation proposé était $y=x^3$, ou $y=x^4$, ou $y=x^5$.

Au reste, on fait ici ce qui est admis en algèbre pour toute équation contenant quelque variable: alors, en effet, l'équation doit se vérifier, quelle que soit la valeur qu'on donne à la variable, cette valeur fût-elle supposée $=o$, et les équations $\frac{y'-y}{h}=2x+h$, $\frac{y'-y}{h}=3x^2+3xh+h^2$, etc., tombent dans cette règle, car h est une variable dans ces équations. Il y a, dans tous ces cas, une fiction, puisque o n'est pas une valeur réelle, qu'il exprime la négation de toute valeur; mais c'est une fiction logique, mathématique, qui ne peut pas plus vicier le calcul des limites qu'elle ne peut vicier les autres calculs où on l'emploie.

DISCUSSIONS

SUR LES

PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER.

DE L'INERTIE, DES MOUVEMENTS ET DES FORCES.

Les corps ou les éléments matériels paraissent ne pouvoir éprouver d'autres changements que ceux qui consistent à se mouvoir, c'est-à-dire à changer continûment de lieu ; à passer du mouvement au repos ; à varier dans l'intensité ou la direction de leur mouvement.

La lumière, la couleur, la chaleur, les sons, ne sauraient être des qualités essentielles des corps, car ces choses varient, apparaissent ou disparaissent dans les mêmes corps, selon les circonstances où ils se trouvent.

Il est d'évidence rationnelle que la substance, l'essence même d'un corps ne peut changer ; et, en dehors d'un changement substantiel, nous ne pouvons concevoir, pour un corps, d'autres changements que ceux qui se rapportent au lieu qu'il occupe. Ainsi tous les effets, tous les phénomènes physiques se rapportent à des mouvements effectués, détruits ou plus ou moins modifiés.

Or, la raison dit qu'il n'y a aucun phénomène ou changement sans cause. On a nommé *force* une cause quelconque de mouvement.

Il est admis qu'un corps ne peut, de lui-même, sans une cause étrangère, passer du repos au mouvement, ou du mouvement au repos, ou modifier son mouvement : ce principe constitue ce qu'on appelle *l'inertie* de la matière.

On a souvent regardé l'inertie comme une force : on dit souvent, par exemple, qu'un corps résiste à une impulsion par sa *force d'inertie.* Cette expression a été critiquée. Poisson, notamment, t. 1er, p. 222, de son *Traité de mécanique,* dit que, quand on s'exprime ainsi, on confond la sensation que l'on a éprouvée et qui résulte de l'effort qu'on a exercé, avec la sensation d'une résistance qui n'existe réellement pas. Pour lui, un corps, par l'inertie, n'agit pas ; il est tout passif : s'il faut faire un plus grand effort pour communiquer le même mouvement à un corps qu'à un autre, c'est que le premier se compose d'une plus grande quantité de matière que le second.

Je crois que cette opinion est erronée. Si, par lui-même, un corps n'offrait aucune résistance *active*, la force nécessaire pour lui imprimer un mouvement

quelconque serait indépendante de sa masse. Un élément matériel ne résistant pas par lui-même, ne réagissant pas sur la force, sur l'objet qui tend à le mouvoir, des éléments réunis pour former un corps, quel que fût leur nombre, ne devraient pas résister non plus. Si, pour les mouvoir, il faut une force d'autant plus grande qu'ils sont plus nombreux, cela vient de ce qu'il y a des forces qui s'exercent entre ces éléments, qui les retiennent les uns près des autres et les empêchent de se réunir en une seule masse absolument continue; ce qui s'explique et ne peut s'expliquer qu'en supposant que les molécules d'un corps s'attirent mutuellement, d'où la cohésion, et qu'entre elles existe un fluide matériel, mais dont les particules incomparablement plus ténues que les molécules des corps, se repoussent réciproquement aussi, et cela avec une intensité qui croît avec leur rapprochement, comme je l'ai déjà dit dans l'introduction. Il est aisé de comprendre que, par le concours de ces forces moléculaires, les corps résistent plus ou moins aux forces qui tendent à les comprimer, à les mettre en mouvement, ou à diminuer leur mouvement, et voici le secret de l'inertie conçue comme exigeant, pour être vaincue dans un corps, une force étrangère proportionnelle à la masse de ce corps.

Supposez que, au lieu d'être un composé d'éléments matériels tenus les uns près des autres par la résultante des forces moléculaires, attractive et répulsive, tous les corps soient chacun une substance parfaitement continue, sans aucun vide, sans aucune division, et il y aura lieu de penser que chacun de ces corps, quelle que soit sa masse ou quantité de matière, n'opposera aucune résistance aux forces qui pourront s'exercer sur lui. En

ce cas, il serait vrai de dire que les corps sont par eux-mêmes *indifférents au repos ou au mouvement*, assertion qui n'est pas exacte si l'on prend les corps tels qu'ils paraissent constitués, car alors, je le répète, ils doivent résister plus ou moins.

Quelle est la mesure de leur résistance? Est-elle grande? est-elle faible? est-elle justement proportionnelle à la masse? Ne dépend-elle pas non-seulement de la masse, mais de la nature des corps, de leur degré d'élasticité, de leur forme? Il est plausible que tout cela influe plus ou moins sur le degré de la résistance. Au reste, sur ces points, il faut consulter l'expérience.

Remarquons, d'ailleurs, que la force peut être telle qu'elle agisse d'autant plus sur un corps que la masse de ce corps est plus grande : telle est la force d'attraction qui est supposée agir sur tous les points d'un corps.

En se fondant sur l'observation, on assure que les mouvements qui animent simultanément un point matériel ne se modifient pas mutuellement ; que les mouvements *relatifs* des différentes parties d'un système de corps ne sont pas modifiés lorsqu'on leur communique à tous une même impulsion : tel est le cas, par exemple, des différentes pièces d'une montre qui continuent à se mouvoir de la même manière les uns par rapport aux autres quand la montre est transportée !

Ce principe pourrait être absolu pour des mouvements s'appliquant à un même point matériel, à un corps qui ne serait pas composé de parties, qui serait un *seul tout continu* de forme absolument invariable. Ces mouvements se composeraient entre eux et auraient une résultante qui différerait des composantes, mais dans laquelle chacune figurerait précisément en raison de son intensité

et de sa direction propre. Mais, théoriquement du moins, le principe en question, dit de l'indépendance des mouvements, ne peut être absolu dans son application aux corps, tels qu'ils paraissent constitués, aux diverses pièces d'une montre, par exemple ; car il est contestable que les forces moléculaires, celles qui produisent la cohésion des éléments matériels et empêchent leur réunion complète, se comportent de manière à permettre cette entière indépendance de mouvements que l'on fonde sur l'observation ; et il est d'ailleurs admissible, plausible même, que, dans la réalité, les mouvements ne conservent point une indépendance parfaite, comme on l'entend. Il peut y avoir des différences que nous ne duissions saisir : tout ce qu'on peut dire, c'est que le principe dont il s'agit se vérifie sensiblement.

Quoi qu'il en soit, le principe est applicable à chacune des *particules élémentaires* d'un corps : quelles que soient les forces qui agissent sur une même particule élémentaire, les mouvements qui en résultent pour elle doivent être indépendants les uns des autres, comme on l'entend.

Quant aux forces, on a posé les principes suivants :

1° *Les vitesses produites par des forces données sont proportionnelles à ces forces.*

Poisson, t. 1er, p. 213, du Traité déjà cité, a cru le démontrer comme il suit :

« Soient x et v l'espace parcouru et la vitesse acquise par un point matériel au bout du temps t. Supposons qu'à cette époque deux forces données f et f' agissent simultanément sur le mobile, suivant la direction de son mouvement ; désignons par u la vitesse infiniment petite que la force f imprimerait au mobile, si elle agissait

seule pendant un temps τ infiniment petit, et par u' celle qui serait produite par la force f', dans le même temps, si la force f n'existait pas. Je dis que la simultanéité de ces deux forces ne modifiera pas les vitesses dont elles sont capables séparément, et que la vitesse produite par la force $f + f'$ sera $u + u'$, c'est-à-dire qu'au bout du temps $t + \tau$, la vitesse du mobile sera devenue $v + u + u'$.

« En effet, l'augmentation de vitesse du mobile ne pourra dépendre que du temps τ auquel elle sera proportionnelle, et de l'état de ce point matériel, ou, autrement dit, de sa position, et de sa vitesse pendant ce même temps τ; ce ne serait donc qu'en influant sur cet état que l'action de la force f' pourrait modifier la vitesse qui sera produite par la force f. Or, pendant le temps τ, la distance du mobile à un point fixe et sa vitesse ne peuvent varier que de quantités infiniment petites, négligeables par rapport à x et v; ses variations de distances à d'autres points fixes ou mobiles, d'où peuvent émaner les forces f et f', sont également négligeables; par conséquent, la vitesse que produira la force f, pendant cet intervalle de temps τ, ne saurait être modifiée en aucune manière par l'action simultanée de la force f'; et il sera de même à l'égard de la force f' qui ne sera pas non plus changée par l'action de f. Donc la vitesse totale imprimée au mobile pendant le temps τ, par la force $f+f'$, sera égale à $u+u'$.

» On verra de même que si la force f agit dans le sens de la vitesse v, et la force f' en sens contraire, l'augmentation de vitesse produite par la force $f-f'$ sera égale à $u-u'$.

» Quelle que soit la nature de chacune des forces f et

f', si elles sont capables d'une même vitesse *u* dans un même temps infiniment petit, ce sont pour nous des *forces égales*. Appliquées en sens contraires l'une de l'autre, elles ne changeront pas la vitesse du mobile, s'il est déjà en mouvement ; il y aura équilibre, si ce point matériel est en repos....

» Lorsque la force qui agit sur le mobile dans le sens de la vitesse acquise, deviendra double, triple, quadruple,.... la vitesse qu'elle produira dans le temps τ, croîtra suivant la même proportion. Réciproquement, quand cette force se réduira à moitié, au tiers, au quart, ... la vitesse qui sera produite diminuera de la même manière ; et, généralement, les vitesses infiniment petites produites pendant des instants égaux, dans le sens ou en sens contraire de la vitesse acquise, ou imprimées à un point matériel en repos, seront entre elles comme les intensités des forces correspondantes.

» C'est sur ce principe général qu'est fondée la mesure des forces dans la Dynamique. On a coutume de le présenter comme une hypothèse ; nous le donnons ici comme une conséquence nécessaire de ce que les vitesses imprimées par des forces quelconques, dans des intervalles de temps infiniment petits, sont toujours infiniment petites, et de ce qu'en même temps les déplacements des mobiles sont aussi infiniment petits. »

J'ai quelque peine à comprendre comment Poisson a pu se contenter d'une telle argumentation. Il fallait qu'il fût singulièrement imbu de la méthode infinitésimale dont il a tant abusé dans cette œuvre. Pour moi, je rejette sans hésiter cette spéculation. Quant au principe en lui-même, il doit être regardé comme un axiome rationnel, s'il s'agit de forces appliquées à des points

matériels isolés, complétement libres ; mais il est contestable, dans l'hypothèse où les forces sont appliquées aux corps apparents de la nature, dont les points matériels ou molécules élémentaires ne sont pas complètement libres et ne se trouvent pas d'ailleurs dans les mêmes conditions.

2° *L'action d'une force sur un corps est indépendante de l'état de repos ou de mouvement de ce corps.*

J'admets ce principe, sous les restrictions que j'ai faites pour les deux principes précédents. De ce même principe on a déduit ceux-ci :

Quand plusieurs forces agissent simultanément sur un même corps, chacune d'elles produit le même effet que si elle était seule.

Une force constante en direction et en intensité anime d'un mouvement iniformément varié le point matériel sur lequel elle agit.

Réciproquement, *quand un mobile soumis à une seule force marche en ligne droite avec un mouvement uniformément varié, la force qui l'anime agit dans la direction de ce mouvement avec une intensité constante.*

Je reviendrai sur les questions relatives aux mouvements variés, aux forces qui les produisent.

Relativement à la mesure des forces, l'on professe et soutient diverses propositions que je vais reproduire.

I. *Deux forces constantes sont entre elles comme les masses auxquelles elles impriment des vitesses égales.*

Pour le montrer on a dit : « Considérons n masses égales $m, m', m''...$ (fig. 2), soumises à n forces égales $f, f, f,...$ parallèles entre elles. Ces masses recevront des vitesses égales, et par suite conserveront les mêmes positions relatives. Nous pourrons donc les supposer,

par la pensée, liées entre elles de manière à ne former qu'une seule masse égale à $n \times m$; et à cette masse il faut les n forces f, ou la force $n \times f$, pour qu'elle reçoive la même vitesse qu'une seule des masses m recevait de la force f. »

Ceci demande une explication et une réserve. Si les n masses étaient invariablement liées entre elles, il suffirait qu'une d'elles m fût soumise à la force f, pour que tout le système fût animé de la même force et éprouvât la même accélération que la masse m ; mais si l'on ne suppose pas ici une liaison invariable entre les n masses, il faudra, en effet, les n forces f, ou la force $n \times f$, pour que toute la masse $n \times m$ reçoive la même accélération qu'une seule des masses m recevrait de la force f.

II. *Deux forces constantes sont entre elles comme les vitesses qu'elles impriment à deux masses égales.*

« Supposons, dit-on, que les deux forces F, f, soient commensurables, et soit Q leur commune mesure, de manière que l'on ait $F = NQ$, $f = nQ$. Soit encore u la vitesse que la force Q est capable d'imprimer, au bout du temps considéré, à la masse donnée ; la force NQ imprimera à cette masse la vitesse $V = Nu$, puisque chaque force égale à Q agit comme si elle était seule ; de même la force nQ imprimera la vitesse $v = nu$ à la même masse ; or, on a la proportion évidente $NQ : nQ :: Nu : nu$, ou $F : f :: V : v$ (*c. q. f. d.*).

» Si les forces que l'on compare ne sont pas commensurables, il suffira de supposer Q infiniment petit. »

Cette dernière conception, fondée sur l'impossible infiniment petit, est fausse. L'argumentation relative au cas des forces commensurables n'est acceptable que sous les restrictions que j'ai déjà posées.

III. *Deux forces constantes sont entre elles comme les produits des masses par les vitesses qu'elles leur impriment pendant le même temps.*

Soit, dit-on encore, F et F′ les deux forces, agissant sur les deux masses m, m', et leur imprimant, au bout du même temps, les vitesses v, v', et considérons une force auxiliaire f capable d'imprimer pendant le temps considéré à la masse m la vitesse v'. En comparant les forces F et f, qui agissent sur la même masse m, on aura, d'après la proposition II,

$$F : f :: v : v'.$$

En comparant les forces f et F′ qui impriment la même vitesse aux masses m et m', on aura, d'après la proposition I,

$$f : F' :: m : m' ;$$

multipliant les deux propositions terme à terme, il vient :

$$F : F' :: mv : m'v' \text{ (c. q. f. d.)}.$$

« Le produit mv se nomme la *quantité de mouvement* : deux forces constantes sont donc entre elles comme les quantités de mouvement qui leur correspondent. »

Cette conclusion est vraie au point de vue où l'on s'est placé pour faire la démonstration ; mais de ce que, à ce point de vue, on peut dire que les forces F, F′ sont entre elles comme leurs quantités de mouvement mv, $m'v'$, il ne s'ensuit pas que, appliquées aux corps, tels qu'ils se trouvent dans la nature, ces forces agissent réellement, effectivement, dans la proportion des quan-

tités de mouvement qui leur correspondent. Cela est contestable, car, ainsi que je l'ai dit, on ne connaît pas la part que peuvent prendre dans le phénomène les forces intermoléculaires des mobiles. On ne voit pas, théoriquement, que la masse peut être compensée par la vitesse, et réciproquement que la vitesse peut compenser la masse. Sur ces points, il faut consulter l'expérience. Je reviendrai sur cette question.

IV. *Une force constante a pour mesure la quantité de mouvement qui lui correspond*, quand on prend pour unité de force constante celle qui imprime à l'unité de masse pendant l'unité de temps, l'unité de vitesse.

« En effet, la proposition III donne $F : F' = mv : v'm'$. Si nous supposons que F' soit l'unité de force, et m' l'unité de masse, il faudra aussi que v' soit égal à l'unité, et l'égalité deviendra $F = mv$; ce qui veut dire que F contient autant de fois l'unité de force, défini comme il a été dit, qu'il y a d'unités abstraites dans le produit du nombre m par le nombre v.

» La formule $F = mv$ donne $m = F : v$. On voit donc que la masse peut se définir le rapport entre une force constante quelconque et la vitesse qu'elle produit. »

Tout cela encore n'est admissible que sous les réserves que j'ai déjà faites au sujet des précédentes propositions.

On distingue le mouvement *uniforme* et le mouvement *varié*.

Le premier, le plus simple que puisse prendre un point matériel, est celui dans lequel ce point décrit une ligne droite, sur laquelle il parcourt des espaces égaux en temps égaux.

Tout mouvement qui n'est pas uniforme, d'après cette définition, est varié.

La vitesse d'un mouvement uniforme est l'espace constant que le mobile parcourt dans l'unité de temps ; ou, pour mieux dire, cet espace est la mesure de la vitesse du mouvement uniforme. En désignant par e l'espace parcouru dans le temps t, et par a l'espace parcouru dans l'unité de temps, on aura

$$e = at, \text{ ou } \frac{e}{t} = a;$$

ce qui montre qu'on peut encore définir la vitesse, le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir ; ou, pour parler plus justement, qu'on peut prendre ce rapport pour mesure de la vitesse dont il s'agit.

Si l'on rapporte la position du mobile à un point fixe O pris sur la droite parcourue, et que b désigne sa distance OB à cette origine, à l'origine du temps, on aura certainement

$$x = e + b,$$

ou

$$x = at + b,$$

équation la plus générale du mouvement uniforme.

On admet que, quand le mouvement n'est pas *uniforme*, la vitesse varie à chaque instant et d'une manière continue, soit en grandeur, soit en direction. On entend alors par vitesse du mobile au bout du temps t, la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié, si à cet instant la force motrice cessait d'agir.

Je m'occuperai du mouvement curviligne dans un chapitre spécial.

Soit M un point matériel se mouvant, d'un mouvement varié, sur une droite Ox. Appelant x la distance OM (fig. 3) de ce mobile ; t le temps compté à partir d'une époque quelconque, et au bout duquel le mobile est en M ; v la vitesse inconnue qu'il possède à cet instant, on croit pouvoir démonter que

$$v=\frac{dx}{dt}.$$

Pour cela, on a eu recours à la considération des *infiniment petits*. Supposant le mobile arrivé en M au bout du temps t, on a dit : « Pendant l'intervalle de temps infiniment petit dt qui succède au temps t, le mobile parcourt l'espace infiniment petit $MM'=dx$, et sa vitesse varie infiniment peu, de sorte qu'on peut regarder le mouvement du mobile de M en M' comme uniforme ; on a donc

$$dx=vdt,\ \text{ou}\ v=\frac{dx}{dt}.$$

Ou bien encore on a dit : « Au bout du temps t, quand le mobile se trouve à la distance x d'un point fixe pris sur la droite qu'il décrit, v étant la vitesse alors acquise, et l'action de la force continuant, l'espace dx que le mobile parcourra dans l'instant dt sera décrit en vertu de cette action et de la vitesse v ; la partie de dx correspondante à cette vitesse, qui serait décrite d'un mouvement uniforme, aura vdt pour valeur. En appelant donc ε la partie de cet espace qui répond à l'action de la force pendant l'instant dt, nous aurons

$$dx = vdt + \varepsilon.$$

Or, la vitesse variant par degrés infiniment petits, et ses variations étant uniquement dues à l'action de la force appliquée au mobile, il s'ensuit que dans le temps dt cette action ne peut produire qu'une vitesse infiniment petite; par conséquent cette même action ne peut faire décrire qu'un espace infiniment petit du second ordre, moindre que celui qui serait décrit uniformément par le mobile, s'il recevait au commencement de dt toute la vitesse qui sera produite pendant la durée de cet instant. On peut donc négliger ε par rapport à vdt dans l'équation précédente, et alors on aura

$$v = \frac{dx}{dt},$$

pour l'expression de la vitesse dans un mouvement quelconque.»

Ces démonstrations doivent être rejetées en ce qu'on y suppose des quantités infiniment petites.

On est arrivé au même résultat par la méthode des limites de la manière suivante :

« Supposons qu'après le temps t le mobile parcoure pendant l'intervalle de temps Δt l'espace $MM' = \Delta x$. On pourra toujours prendre le temps Δt assez court pour que, pendant ce temps-là, la vitesse du mobile soit continuellement croissante ou décroissante. Supposons-là croissante : v étant la vitesse du mobile au point M, désignons par v' sa vitesse quand il arrive au point M'. L'espace Δx parcouru par le mobile pendant le temps Δt doit être évidemment plus grand que l'espace $v\Delta t$ qu'il parcourrait s'il se mouvait uniformément pendant le

temps Δt avec la vitesse v qu'il a au commencement de ce temps, puisque v est sa plus petite vitesse pendant le temps Δt. Ensuite Δx doit être plus petit que l'espace $v'\Delta t$ que parcourrait le mobile s'il se trouvait avoir la vitesse constante v' qu'il a au bout du temps dt et qui est sa plus grande vitesse.

» On a donc

$$v\Delta t < \Delta x < v'\Delta t,$$

d'où

$$v < \frac{\Delta x}{\Delta t} < v'.$$

Si Δt tend vers zéro, v' se rapproche indéfiniment de v qui ne change pas ; $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ se rapproche donc aussi indéfiniment de v, de sorte que l'on a

$$v = lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \text{ »}$$

Cette démonstration est juste, au point de vue où l'on raisonne, celui de la variation *continue* de la vitesse dans le mouvement varié, c'est-à-dire d'une variation telle que sa vitesse ne serait pas la même un instant, un temps quelconque, si court qu'il fût ; hypothèse inadmissible : il faut nécessairement qu'une vitesse, pour être, dure un certain temps, un instant, qui, si court qu'il soit conçu, est une partie du temps, de la durée, et par conséquent a lui-même une durée.

Au moyen de l'équation $v = \frac{dx}{dt}$, on est arrivé à l'équation $x = b + at + \frac{gt^2}{2}$, comme il suit :

« Soit un point matériel M (fig 4) se mouvant sur

une droite Ox de telle sorte que sa vitesse croisse proportionnellement au temps t, à partir du moment où le mobile était en un point donné A. Soit g l'accroissement continu de la vitesse pour chaque unité de temps. Le point O étant pris pour origine, soient $OA = b$ l'abscisse du mobile à l'époque initiale, et $OM = x$ son abscisse après le temps t. En appelant a la vitesse du mobile au point A, on aura

$$v = a + gt$$

ou

$$dx = adt + gtdt;$$

puis, en intégrant,

$$x = c + at + \frac{gt^2}{2}.$$

Or, pour $t = o$, on doit avoir $x = b$; donc $c = b$, et l'équation du mouvement est

$$x = b + at + \frac{gt^2}{2}. \text{ »}$$

Le mouvement représenté par cette équation est dit uniformément varié ou accéléré.

Si l'on place le point O en A, c'est-à-dire si l'on compte les espaces à partir du point où se trouvait le mobile à l'origine du temps ; si de plus on suppose $a = o$, c'est-à-dire si l'on suppose nulle la vitesse à l'origine du temps, il viendra

$$v = gt, \; x = \frac{gt^2}{2},$$

où l'on voit que si la vitesse croît avec le temps, l'espace parcouru croîtra proportionnellement au carré du temps.

L'on a obtenu le même résultat par le procédé géométrique suivant :

« Représentons le temps par la longueur AB (fig. 5), et la vitesse au bout de ce temps, par la longueur BC prise sur la perpendiculaire à l'extrémité de AB. Divisons le temps AB en parties égales très-petites Aα, βα, βγ,... Les vitesses acquises après les temps représentés par les longueurs Aα, Aβ, Aγ...., seront données par les longueurs *a*α, *b*β, *c*γ..., qui sont proportionnelles à ces temps. Supposons maintenant que, pendant chacune des subdivisions du temps Aα, αβ..., la vitesse soit constante et égale à celle qui n'a lieu réellement qu'à la fin de cet intervalle ; le mouvement étant uniforme, les espaces parcourus pendant les différentes subdivisions du temps seront représentés par les surfaces des rectangles A*a*, *b'*β, *c'*γ... ; et l'espace parcouru au bout du temps AB, par la somme de ces rectangles (1). Cette somme diffère de la surface du triangle rectangle ABC de tout ce qui dépasse l'hypoténuse AC. Il est facile de voir que si le temps AB avait été divisé en un nombre plus grand, double, par exemple, de parties égales, la somme des rectangles aurait moins différé de la surface du triangle ABC : l'excès aurait été diminué, des parties qui sont ombrées dans la figure. On voit aussi que, à mesure que les subdivisions du temps seront plus nombreuses, la somme des aires des rectangles différera de moins en moins de l'aire du triangle ABC,

(1) En effet, si l'on représente le temps *t* par la longueur AB (fig. 6) et la vitesse par BC perpendiculaire à AB, l'aire du rectangle ABCD peut servir à représenter l'espace parcouru, en ce qu'il contient autant de fois l'unité de surface, que l'espace parcouru renferme de fois l'unité de longueur.

enfin, à la limite, quand le temps sera partagé en un nombre infini de parties également infiniment petites, c'est-à-dire quand la vitesse variera d'une manière continue, l'espace parcouru pendant le temps AB sera représenté par la surface de ce triangle. Or, cette surface a pour mesure $\frac{1}{2}$ AB×BC; posant AB $= t$, BC$=v$, et remarquant qu'on a déjà $v = gt$, on obtient, pour l'espace parcouru,

$$e = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AB} \times \mathrm{BC}, \text{ ou } e = \tfrac{1}{2}\,gt^2. \text{ »}$$

Ces deux démonstrations, justes en elles-même, pèchent l'une et l'autre par la base même sur laquelle elles reposent : l'hypothèse d'une variation continue de la vitesse dans le mouvement dont il s'agit. Pour que la formule $e = \frac{gt^2}{2}$ fût vraie, il faudrait que la vitesse du mobile dût croître *continûment*; or, je le répète, cet accroissement-là est essentiellement impossible; la raison le rejette. L'action d'une force constante sur un mobile ne saurait donc avoir pour effet de lui faire parcourir un espace croissant comme le carré du temps. Plus on supposera que la variation de vitesse approche d'être continue, plus on sera près de la vérité en appliquant la formule $e = \frac{gt^2}{2}$; mais on ne sera jamais fondé à la regarder comme absolument exacte.

Au reste, il y a là une difficulté inextricable, qu'on ne saurait résoudre d'une manière rationnelle ; car si l'on suppose qu'en ce cas, l'action a lieu de telle sorte que la vitesse produite ne change que d'intervalle en intervalle de temps, on ne voit aucune cause déterminante de la durée de chaque intervalle de temps ; la rai-

son dit même qu'il n'y a pas de cause déterminante possible de cet intervalle (1).

D'après les formules $v = gt$, $e = \frac{gt}{2}$, l'espace parcouru dans le mouvement uniformément accéléré, par un mobile partant de l'état de repos, serait égal à l'espace qu'il parcourrait d'un mouvement uniforme avec la vitesse moyenne $\frac{v}{2}$ ou $\frac{gt}{2}$.

Des mêmes formules, il résulterait que l'espace parcouru pendant un certain temps, dans le mouvement uniformément accéléré, est la moitié de l'espace parcouru d'un mouvement uniforme pendant le même temps en vertu de la vitesse acquise ; car cette vitesse au bout du temps t étant égale à gt, l'espace qu'elle ferait parcourir au mobile pendant le temps t serait égal à gt^2.

(1) C'est là une antinomie qui vient s'ajouter aux raisons que j'ai présentées ailleurs pour montrer l'idéalité de la matière, du mouvement, du monde phénoménal apparent. (Voir l'*Exposé de mon système philosophique*.)

CHAPITRE II.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES ET VITESSES.

§ I. — Axiomes et principes.

On pose généralement, comme axiomes, que *deux forces égales et contraires appliquées à un même point sont en équilibre,* et que *deux forces égales et contraires appliquées aux extrémités d'une droite considérée comme une verge invariable de longueur, et agissant dans la direction de cette droite, sont aussi en équilibre.*

Ces propositions sont en effet évidentes, car il n'y a pas de raison pour que le mouvement soit produit plutôt d'un côté que de l'autre.

Au moyen de ces axiomes, on montre aisément que l'effet d'une force qui sollicite un corps supposé inextensible ne peut être changé en quelque point de sa direction qu'on la suppose appliquée, si ce point est un des points du corps lui-même, ou si, étant en dehors, il lui est invariablement attaché.

On a donc ce principe : *on peut, sans changer l'effet d'une force, l'appliquer en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit lié au premier point d'application par une ligne droite rigide et inextensible.*

Soit un corps ou système de forme invariable tenu en équilibre par des forces quelconques P, Q, R, S, etc., dirigées comme on voudra dans l'espace. Puisque, dit-on, ces forces se font équilibre, l'une quelconque d'entre elles, la force P, par exemple, s'oppose seule à l'action de toutes les autres Q, R, S, etc.; l'effet de ces dernières est donc de solliciter le système comme une simple force égale et contraire à la force P. On en conclut qu'il peut se faire qu'une seule force soit capable de produire sur un corps le même effet que plusieurs et en tienne parfaitement lieu. Cette force se nomme leur *résultante*.

D'après ces données, on voit que si deux forces P et Q sont appliquées à un même point A sous un angle quelconque, une troisième force R convenablement appliquée à ce point, peut faire équilibre aux forces P et Q; car, par les effets combinés des deux forces P et Q, le point A tend à quitter le lieu où il est, mais ce point ne peut s'échapper que d'un seul côté, et, par conséquent, si l'on y applique une force convenable en sens contraire, ce point demeurera en équilibre. Or, les trois forces P, Q, R étant en équilibre autour du point A, la force R est égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

Il est d'ailleurs visible que cette résultante doit être dans le plan des deux autres; car il n'y a pas de raison pour qu'elle ait au-dessus du plan une certaine position plutôt que la position parfaitement symétrique au-dessous. On ajoute qu'elle doit être dirigée dans l'angle PAQ des deux forces. Pour le montrer, Poinsot allègue que le point A ne peut se mouvoir dans la partie qui est au-dessus de la partie AQ, vers D (fig. 7); que de même il ne peut se mouvoir au-dessus de la ligne AP, vers B, et que par conséquent il ne pourra se mouvoir que dans

l'angle PAQ. Ou bien on a dit : la résultante sera dirigée dans l'angle PAQ, car il n'existe aucune raison pour que le point A tende à sortir de cet angle : au contraire la force Q tend à l'éloigner de l'angle PAB, la force P de l'angle QAD, et les deux forces réunies de l'angle BAD, il restera donc dans l'angle PAQ. Cette raison-là est suffisante; celle de Poinsot laisse à désirer. On voit aussi que, dans le cas où les deux forces P et Q seraient égales, la résultante couperait en deux parties égales l'angle des deux forces.

On émet, à bon droit, comme axiome évident en soi, que, *lorsque deux forces* P *et* Q *agissent dans la même* direction et dans le même sens, ces forces s'ajoutent et donnent ainsi une résultante égale à P + Q.

Comme corollaire de cet axiome, on affirme 1° que la résultante de tant de forces que l'on voudra, qui agissent dans une même direction et dans le même sens est égale à leur somme totale et agit dans la même direction et le même sens. Cela est vrai et pourrait même être posé comme axiome *à priori*.

2° Que lorsque deux forces inégales P et Q agissent en sens contraire, dans une même direction, leur résultante est égale à leur différence et qu'elle agit dans le sens de la plus grande. Cela est également évident en soi, mais on a voulu le démontrer. On peut, dit-on, concevoir dans la plus grande force supposée P, par exemple, une force égale et contraire à Q et qui la détruit. On peut ensuite supprimer ces deux forces-là, et le point est actuellement tiré par la différence P — Q des deux forces.

On émet finalement ce principe : *La résultante de tant de forces qu'on voudra, agissantes dans la même direction*

est égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent dans le sens contraire, et elle agit dans le sens de la plus grande somme.

§ II. — Composition des forces qui agissent suivant des directions parallèles.

Théorème 1.

Si deux forces quelconques P *et* Q (fig. 8) *parallèles et de même sens, sont appliquées aux extrémités* A *et* B *d'une droite rigide* AB, 1° *ces deux forces ont une résultante et cette résultante doit être appliquée à la ligne* AB *entre les deux points* A *et* B ; 2° *cette force est parallèle aux composantes* P *et* Q, *et égale à leur somme.*

Pour le montrer, Poinsot raisonne ainsi (1) :

« 1° Appliquez à volonté aux deux points A et B deux forces M et N égales et contraires, et qui agissent dans la direction AB. L'effet de ces deux forces sera nul, et, par conséquent, l'effet des deux forces P et Q ne sera pas changé : mais les deux forces M et P appliquées en A ont une résultante S appliquée au point A, et dirigées dans l'angle MAP. De même les deux forces N et Q ont une résultante T, appliquée en B et dirigée dans l'angle NBQ. Concevez qu'on ait pris ces deux résultantes, et qu'on les ait appliquées toutes deux au point D où leurs directions vont nécessairement se couper, la résultante des deux forces S et T sera absolument la même que celle des deux forces P et Q : or, étant appliquée en D, et devant être dirigée dans l'angle ADB, elle ira passer

(1) *Éléments de statique*, n° 19, p. 13, 10° édition.

entre A et B, en un certain point C, où l'on pourra la supposer appliquée.

» 2° Maintenant, pour démontrer que cette résultante est parallèle aux forces P et Q, et égale à leur somme, imaginons qu'au point D on redécompose la force S en deux composantes M′ et P′, parfaitement égales et parallèles aux premières M et P; de même, qu'on redécompose la force T en deux composantes N′ et Q′, parfaitement égales et parallèles aux premières N et Q. Les deux forces, M′ et N′ seront égales; de plus, elles seront directement opposées, puisque, appliquées à un même point D, elles sont parallèles à une même droite MN, et par conséquent leur effet sera absolument nul. Il ne reste donc que les deux forces P′ et Q′, respectivement égales et parallèles aux forces P et Q. Or, ces deux forces étant évidemment dans une même direction, se composerout en une seule R, égale à leur somme P′ + Q′ ou P + Q. *Ce qu'il fallait démontrer.* »

On voit que, dans cette démonstration, l'auteur suppose que la droite à laquelle sont appliquées les forces parallèles et de même sens est *rigide*. Si cette droite n'était pas supposée inflexible, inextensible, l'on ne pourrait pas assurer que l'effet des deux forces M et N égales et contraires est alors absolument nul, et que l'effet des deux forces P et Q n'est aucunement changé par l'action de ces deux forces M et N. Ces deux dernières forces ne doivent s'annuler qu'à la condition qu'en tirant l'extrémité de la droite AB, elles tirent également à la fois et en sens opposé toute la droite, ce qui implique que cette droite est d'une seule pièce, qu'elle n'est pas composée de parties mobiles, pouvant céder individuellement, les unes sans les autres, inégalement, à la traction, aux

forces agissant sur elles. Or, une telle droite ou verge ne peut avoir qu'un même mouvement dans toute son étendue; elle ne saurait se mouvoir autrement que dans sa direction même, ou parallèlement à cette direction; elle ne peut tourner sur elle-même, marcher en faisant un angle avec sa première position; car, pour cela, il faudrait que sa vitesse diminuât de plus en plus et *d'une manière continue* à partir de l'extrémité du rayon vecteur jusqu'au centre de rotation; ce qui est inadmissible. Il est donc visible que, quels que soient les points où des forces parallèles seront appliquées à cette droite, l'effet devra être exactement le même. Il est évident, d'ailleurs, que la résultante sera égale à la somme de ces forces et leur sera parallèle, mais qu'elle pourra indifféremment s'appliquer à un point quelconque de la droite inflexible et inextensible, et non pas seulement au point déterminé comme on vient de le voir. Le théorème dont il s'agit est donc inexact sous ce rapport essentiel.

Théorème 2.

Le point C *d'application de la résultante de deux forces* P *et* Q *qui agissent aux extrémités* A *et* B *d'une droite inflexible* AB, *partage cette droite dans la raison réciproque de* P *à* Q; *de sorte que l'on a* P : Q : : BC : AC.

Poinsot a cru démontrer ce théorème de la manière suivante :

« Supposons d'abord que les forces P et Q soient commensurables, c'est-à-dire soient entre elles comme deux nombres entiers *m* et *n*.

» Divisons AB au point H (fig. 9) en deux parties

directement proportionnelles aux deux forces P et Q, de manière qu'on ait

$$AH : BH :: P : Q,$$

et, par conséquent, $:: m : n$. Sur le prolongement de la ligne inflexible AB, prenons AG = AH et BK = BH. Le point A sera le milieu de GH, et le point B le milieu de HK.

» Cela posé, puisque les forces P et Q sont entre elles comme les lignes AH et BH, elles seront aussi comme les lignes GH et HK. Et comme il y a, par hypothèse, dans la ligne AH, m mesures telles que BH en contient n, il y aura $2m$ mesures dans GH, et $2n$ mesures égales dans HK. Or on peut décomposer la force P en $2m$ forces égales et parallèles, applicables aux $2m$ points milieux des communes mesures de la ligne GH; et la force Q en $2n$ forces parallèles, égales entre elles et aux premières, appliquées aux $2n$ points milieux des communes mesures de la ligne HK. Maintenant toutes ces forces égales, étant équidistantes, se trouveront placées deux à deux à égales distances du milieu C de la ligne entière GK, et, par conséquent, leur résultante générale, qui est celle des deux forces P et Q, passera nécessairement par le milieu de la ligne GK.

» Mais à cause de GC = AC, il vient, en retranchant la partie commune AC, BC = AG = AH; et en ajoutant de part et d'autre CH, AC = BH. Donc puisque l'on a P : Q :: AH : BH, on a aussi

$$P : Q :: BC : AC.$$

» Supposons, en second lieu, que les deux forces P et Q ne soient pas commensurables.

» Je remarque d'abord que si la résultante de deux forces quelconques P et Q (fig. 10) appliquées aux points A et B, tombe en C, la résultante de la force P et d'une force $Q + I > Q$ tombera entre le point C et le point B; c'est-à-dire que le point d'application de la résultante s'approchera du point d'application de la composante qui aura augmenté. En effet, pour trouver la résultante des deux composantes P et $Q + I$, on peut prendre d'abord la résultante R de P et Q, qui passe au point C, par hypothèse, et ensuite celle de R et de I, dont le point d'application sera entre C et B.

» Maintenant, si la résultante des deux forces incommensurables P et Q (fig. 11) ne passe pas au point C, qui est tel qu'on a P : Q : : BC : AC, elle passera en un autre point situé entre A et C, ou entre C et B. Supposons que ce soit en G entre A et C. Partagez la ligne AB en parties égales toutes plus petites que GC, il y aura au moins un point de division entre C et G. Soit I ce point : les deux lignes AI et BI seront commensurables, et le point I pourra être considéré comme le point d'application de la résultante de deux forces P et Q', qui seraient telles, qu'on aurait P : Q' : : BI : AI, ce qui donne $Q' < Q$ (puisqu'on a, par hypothèse, P : Q : : BC : AC). Mais la résultante des deux forces P et Q' passant en I, celle des deux forces P et $Q > Q'$ passera entre I et B, et ne pourra tomber en G, contre l'hypothèse.

» On ferait voir absolument de la même manière qu'elle ne peut tomber entre C et B; et par conséquent elle passe nécessairement en C. »

Je ferai à ce théorème le même reproche que j'ai adressé au premier. Ici encore la droite AB étant sup-

posée absolument inflexible, inextensible, la résultante de deux forces parallèles qui lui sont appliquées n'est pas seulement au point qu'indique le théorème, mais à un point quelconque de la droite.

D'autres démonstrations de ces deux théorèmes ont été présentées, mais toutes pèchent au point de vue où je viens de critiquer celles-ci.

Telle est notamment la démonstration de Cauchy, qui se trouve dans un livre intitulé : *Leçons de mécanique analytique*, publiées par M. l'abbé Moigno, 6e leçon, pag. 103.

Telle est aussi celle de Poisson, contenue dans son *Traité de mécanique*, 2e édition, t. 1, ch. III, p. 50. Poisson, d'ailleurs, présente aussi la deuxième démonstration adoptée par Poinsot, même tome, ch. III, p. 90.

Ces démonstrations impliquent l'inextensibilité, l'inflexibilité absolues des droites considérées. Il faudrait donc que les droites auxquelles seraient appliquées les forces fussent d'une seule pièce, d'un seul tout continu, car si elles étaient formées de parties distantes les unes des autres, on ne saurait assurer que les choses se passent de manière que les conditions des théorèmes se réalisent. Ainsi, dans les cas dont il s'agit, il faut admettre, supposer que la droite qui est soumise à des forces parallèles, est mue parallèlement à elle-même, ne peut se mouvoir en s'écartant de ce parallélisme. — Or, dans ces hypothèses, où il faut se placer pour que les théorèmes en question soient démontrés, il est évident que les forces appliquées aux extrémités d'une droite ont une résultante qui doit être égale à leur somme et leur être parallèle, mais il est de même évident que cette résultante peut s'appliquer à un point

quelconque de la droite, et que les théorèmes, à cet égard, s'écartent essentiellement de la vérité.

L'on ne serait pas fondé à objecter qu'il ne peut être indifférent, égal, qu'une barre soit tirée par une force appliquée à son extrémité ou à tout autre point. Je répondrais que cela ne serait pas indifférent s'il s'agissait de barres formées de molécules distantes les unes des autres, recélant entre elles un fluide répulsif et pouvant recevoir des mouvements plus ou moins différents par l'action d'une force appliquée ; mais qu'une barre supposée absolument continue, obsolument invariable dans sa forme, ne saurait être mue que dans sa direction ou parallèlement à elle-même, et que l'action exercée sur elle devrait être exactement la même, à quelque point que la force ou les forces seraient appliquées.

D'ailleurs, cette considération de position et d'action des forces par rapport aux divers points de la masse qu'on invoquerait ici, n'étant pas invoquée, impliquée dans les démonstrations dont il s'agit, ne saurait être alléguée pour les légitimer, et je persiste à dire qu'elles ne sont pas exactes en tant qu'elles déterminent un point unique pour l'application de la résultante des forces.

Au reste, d'après les principes de la proportionnalité des forces aux vitesses, et de l'indépendance des mouvements, principes qui sont certainement applicables dans les cas où nous raisonnons, parce qu'il s'agit de droites ou barres supposées absolument invariables dans leur forme, je puis montrer qu'en effet la résultante des forces peut s'appliquer, dans cette hypothèse, à d'autres points et même à des points quelconques de la droite ou barre à laquelle elles sont appliquées.

En effet, supposons que l'on ait une telle droite ou barre et qu'on applique à l'une de ces extrémités A (fig. 11), une force P qui la tire suivant une direction quelconque autre que celle même de la droite. Cette force fera marcher parallèlement à elle-même la droite avec une certaine vitesse *v*. Si, au lieu d'une seule force P, on applique au même point A deux forces égales chacune à P, d'après le principe de la proportionnalité des forces aux vitesses, la droite marchera encore parallèlement à elle-même, mais cette fois avec une vitesse double. Maintenant si, au lieu d'appliquer la double force 2P au point A, je n'y applique que P, et que je porte l'autre force P à l'autre extrémité B de la droite, évidemment l'effet sera le même que dans le premier cas, celui où la double force 2P était appliquée en A. D'après les théorèmes, dans le second cas, la résultante 2P ne pourrait être qu'au milieu de AB ; mais cela n'est pas, puisque, je viens de le montrer, elle pourrait aussi bien être placée en A, et conséquemment en B. Mais si ces deux forces égales peuvent être placées soit chacune à une extrémité, soit toutes les deux à une seule extrémité A ou B, sans aucun changement dans l'effet produit, à plus forte raison pourrait-on les placer à un point intermédiaire quelconque de la droite aussi sans changer l'effet.

Dans la réalité, dans la nature, il n'y a pas de droite, de barre ou tige absolument inflexible, inextensible. Les corps n'étant point formés d'une seule masse continue, mais de molécules, de parties élémentaires plus ou moins distantes les unes des autres, retenues plus ou moins les unes près des autres par la cohésion, quand une force est appliquée à un point d'un corps, elle ne met directement en mouvement que le point, que la

molécule à laquelle elle s'applique. Cette molécule, par l'effet de la cohésion, entraîne la molécule voisine, celle-ci entraîne elle-même une autre molécule, et ainsi de suite, de proche en proche; et si un corps paraît néanmoins conserver sa rigidité, cela ne peut être vrai absolument. S'il s'agit d'une barre métallique, par exemple, qui soit soumise à une force de traction appliquée perpendiculairement à la direction de cette barre, cette même barre, en réalité, ne sera pas mue également. Sans doute, ses molécules, dans leur mouvement, n'auront pas toutes exactement la même vitesse, elles ne se comporteront pas exactement de la même manière (1).

Supposons qu'à l'extrémité B d'une barre droite AB (fig. 13) soit appliquée la force P agissant perpendiculairement à AB. Admettons que cette barre soit d'une très-grande dureté, soit d'acier ou de platine, par exemple. D'après ce que je viens de dire, P ne tirera pas avec une même vitesse la totalité de la barre. Appelons *b* une première molécule à laquelle la force P soit appliquée : elle tirera cette molécule en *b'*, je suppose; la molécule suivante *c*, par la force de cohésion, viendra un peu moins vite en *c'*, faisant un chemin un peu moindre que *bb'*; *d* viendra en *d'*, à une distance un peu moindre que *cc'*, et ainsi de suite, de manière que, à cause de la cohésion existante entre toutes ses molécules, la barre entière sera déplacée, non pas tout à fait parallèlement à elle-même, mais en faisant un angle avec sa première direction AB. Toutefois, dans l'hypothèse, si la barre est supposée n'obéir à aucune autre force que *p*, elle pourra bien paraître se déplacer parallèlement à

(1) Voir, à ce sujet, la note I placée à la fin de ce livre.

elle-même, à AB, l'angle qu'elle fera avec cette ligne n'étant pas sensible. S'il s'agit d'une barre moins dure, plus sensiblement flexible, il pourra se faire que, soumise à la seule force P, à son extrémité B, elle s'écarte visiblement du parallélisme. Considérée dans sa totalité, la barre paraîtra ainsi tourner sur elle-même, sur son extrémité A, bien que chacune de ses parties élémentaires ne puisse se mouvoir et ne se meuve que parallèlement à elle-même.

Supposons qu'il en soit ainsi. Dans cette supposition, je ne vois pas que si deux forces parallèles et de même sens sont appliquées aux extrémités de la barre, elles devront agir sur cette barre comme le ferait leur somme appliquée parallèlement au milieu de la barre, si elles sont égales, ou à un point partageant la barre en raison réciproque de ces deux forces, si elles sont inégales.

En ce cas, les deux forces supposées réunies en un point intermédiaire entre les deux extrémités de la barre devraient tendre à la faire fléchir à ce point d'application; or, dans l'hypothèse, le même effet se produira-t-il si les forces sont appliquées aux extrémités de la barre?

Représentons la barre par la droite *ab* (fig. 14). Supposons que par l'action de la seule force *ac* perpendiculaire à *ab*, le point *a* dût venir en *c*, le point *b* restant en repos, de sorte que *ab* dût se trouver en *cb*. Concevons de même que, par l'action seule de la force *bd* égale et parallèle à *ac*, *ab* dût venir en *ad*. Il est visible que les triangles *abc*, *bad* sont égaux et semblables et que la ligne *ef* menée de *f*, point d'intersection des lignes *cb*, *ad*, au milieu de *ab*, est juste la moitié des bases *ac*, *bd*. Or chacune des forces *ac*, *bd* devant, dans l'hypothèse,

faire marcher le point *e* vers *f* d'une distance égale à *ef*, il s'ensuit que *e*, par les actions réunies des deux forces *ac*, *bd*, sera porté à une distance *eg* double de *ef*, par conséquent égale à *ac* ou *bd*. En menant les lignes *hi*, *kl*, etc., parallèles à *ac*, *bd*, entre les lignes *ab* et *cb*, *ab* et *ad*, on verrait de même, par la proportionnalité des côtés des triangles semblables, que les points *h*, *k*, etc., par les forces *ac*, *bd*, seraient portés aussi à une distance égale à *ac*, *bd*, et l'on conclurait que, dans l'hypothèse, les actions réunies des deux forces devraient déplacer parallèlement à elle-même la ligne *ab*.

Il est aisé de voir qu'il en serait ainsi dans la supposition où la seule action de *ac*, égale à *bd*, devrait faire venir *ab*, non pas en *cb*, mais en *cb'* (fig. 15), *bb'* étant une distance moindre que *ac*, et que de même par l'action seule de *bd*, à l'autre extrémité de *ab*, *ab* devrait se porter en *da'*, *aa'* étant une distance égale à *bb'* et moindre que *ac* ou *bd*.

En effet, joignons *a'* et *b'* par une droite. Comme on a $aa' = bb'$, cette droite sera parallèle à *ab*. Du point *e* milieu de *a'b'* menons une droite au point *f* intersection de *cb'* et *da'*. Evidemment, comme dans l'exemple précédent, les deux triangles *a'b'c*, *b'a'd* seront égaux et semblables, et l'on aura $ef = \frac{a'c}{2} = \frac{b'd}{2}$. Ainsi, par les actions réunies des forces *ac*, *bd*, *e* sera porté à une distance *eg* double de *ef* et conséquemment égale à *a'c* où *b'd*. En menant les lignes *hi*, *kl*, etc., on reconnaîtrait de même, par la proportionnalité des côtés des triangles semblables, que les points *h*, *k*, etc., par des forces *ac*, *bd*, seraient portés aussi à une distance égale à *a'c* ou *b'd*. En outre, par les actions réunies de ces mêmes

forces *ab* serait menée à une distance double de *aa'* ou *bb'* dans toute son étendue. En somme donc leurs actions déplaceraient, dans l'hypothèse, parallèlement à elle-même la ligne *ab*.

Ainsi, dans les hypothèses où je me suis placé, l'effet de l'application des forces parallèles et égales aux extrémités de la barre ne devrait pas être exactement égal à l'effet de leur application au milieu de la même barre ; car, je le répète, l'application au milieu de la barre devrait faire plus ou moins fléchir la barre au point d'application, tandis que les mêmes forces appliquées aux extrémités devraient mouvoir la barre parallèlement à elle-même. Rien ne montre d'ailleurs que, à part une légère inflexion produite par l'application au centre, les forces réunies en ce point ne feraient pas plus mouvoir la barre que si elles étaient séparément appliquées aux extrémités.

Si, dans les mêmes hypothèses, les deux forces appliquées sont inégales, on pourrait aussi démontrer géométriquement, par des procédés analogues à ceux que j'ai appliqués au cas de l'égalité des deux forces, que la barre, par les actions réunies des deux forces appliquées à ses extrémités, ne serait pas mue parallèlement à elle-même, mais qu'elle se maintiendrait en ligne droite ; tandis que, si les deux forces étaient appliquées à un point de la barre placé entre ses extrémités, leurs actions réunies devraient la faire fléchir au point d'application.

Mais j'ai raisonné dans la supposition que les forces appliquées aux extrémités de la barre avaient pour effet d'amener ces extrémités dans la direction même des forces, c'est-à-dire, dans les exemples présentés, per-

pendiculairement à la première position de la barre. Or cette hypothèse ne peut être exacte : l'on peut dire avec raison que, dans ces cas, les forces feraient décrire aux points extrêmes des courbes, des lignes quelconques *bd*, *ac* (fig. 15 *bis*) comprises dans les angles formés par la direction de la barre et celle des forces ; on le peut en alléguant que la cohésion existante entre les molécules doit tendre à faire dévier de la ligne droite celles extrêmes soumises aux actions directes des forces appliquées. Alors, si chaque force, étant appliquée seule à une extrémité de la barre, agissait de manière que la barre dût être maintenue en ligne droite, et marcher obliquement à sa première direction, il serait facile de reconnaître, par un procédé analogue à celui que j'ai indiqué, et à l'aide de la figure 15 *bis*, que les actions réunies des forces appliquées aux extrémités de la barre, la feraient fléchir à un point intermédiaire, à son milieu si ces forces étaient égales, lui feraient faire ainsi un angle dont l'ouverture serait tournée vers sa ligne primitive ; mais rien ne montre que cet angle devrait être égal à celui qui serait produit en elle par l'application des deux forces à un même point déterminé par les théorèmes.

Au reste, rien ne montre que les molécules de la barre à l'extrémité de laquelle une force est appliquée se maintiennent en ligne droite, comme je l'ai supposé. Ne connaissant point la constitution intime des corps, le degré, la *loi* d'action des forces de cohésion ou de répulsion qui retiennent les molécules les unes près des autres ou les empêchent de se réunir complétement, d'être en contact absolu entre elles, on ne saurait déterminer les mouvements qu'elles doivent prendre respectivement quand une ou plusieurs d'entre elles sont directement

soumises à une ou plusieurs forces données en direction et intensité. On peut donc supposer que si des molécules d'abord sont rangées en ligne droite et qu'une d'elles soit soumise directement à une certaine force, les autres seront entraînées de manière à se placer sur une ligne courbe ou brisée, sur une ligne très-irrégulière, très-variable dans sa direction.

Et puis, en supposant que les molécules, en ce cas, se maintiennent en ligne droite, en obliquant relativement à leur première direction, quelle sera l'obliquité qu'elles affecteront ? Quelle sera l'angle que fera la ligne des molécules dans le mouvement imprimé ? Quoi qu'il en soit, comment expliquer, comment assurer que les deux forces appliquées chacune à une extrémité de la barre ont une résultante égale à leur somme, applicable à tel ou tel point intermédiaire, c'est-à-dire qu'en appliquant ces deux forces en ce point intermédiaire on obtiendra exactement le même effet que si les mêmes forces étaient appliquées chacune à une extrémité ?

Il est au contraire plausible que les résultats qui se produiront dans les deux cas, diffèreront entre eux sous tous les rapports (voir la note I, à la fin de ce livre).

Les théorèmes en question montrent seulement que dans l'hypothèse de droites absolument rigides, inflexibles, inextensibles, deux forces P et Q parallèles et de même sens, appliquées aux extrémités d'une droite AB, ont une résultante parallèle à P et Q, et qui *peut* s'appliquer à la ligne AB entre P et Q, à un point partageant cette droite dans la raison réciproque de P à Q ; mais ces théorèmes ne prouvent pas, ne montrent pas que leur résultante ne peut s'appliquer qu'à ce point. Je dis, moi, que, dans l'hypothèse d'inflexibilité, d'inextensibilité

absolue de la droite AB, la résultante devrait pouvoir s'appliquer à un point quelconque de la droite. D'ailleurs des corps ne pourraient être absolument inflexibles, inextensibles, qu'à la condition d'être une seule masse continue ; ce qui n'est point. De toutes manières donc la théorie est sans base, sans fondement.

Les auteurs qui ont écrit sur la mécanique, sentant, comprenant que les corps ne présentent pas la fixité de forme, les conditions d'inextensibilité, d'inflexibilité absolues que supposent ces théorèmes et plusieurs autres, ont dit que les droites, les tiges, les corps quelconques auxquels sont appliquées les forces, subissent, en effet, tout d'abord des changements dans leurs formes, mais qu'ils en prennent instantanément d'autres qu'ils gardent, et que c'est dans ces états qu'on doit leur appliquer les théorèmes dont il s'agit.

Mais je n'accepte point cette justification. Ainsi, en ce qui concerne les théorèmes relatifs à la composition des forces parallèles, je répondrai que si vraiment la droite ou barre à laquelle sont appliquées les forces peut prendre, par l'action même de celles-ci, et garder ensuite sous la même action, une forme invariable, ce qui d'ailleurs est fort contestable, la forme invariable qu'elle prendra par l'application des forces à ses extrémités, ne sera pas semblable à celle que lui donnera la somme de ces mêmes forces appliquées au point que l'on assigne à leur résultante.

Au reste, si les corps devenaient et se maintenaient immuables de forme, comme on le suppose, ce serait par le concours persistant des forces appliquées : on ne serait donc pas dans les conditions des théorèmes qui supposent que les forces appliquées agissent sur des

corps de forme invariable indépendamment de l'action actuelle des forces : la justification qu'on a imaginée pour sauver les théorèmes en question n'est donc qu'un cercle vicieux.

Enfin, veut-on aller jusqu'à admettre que la forme définitive de la droite ou barre, non-seulement est semblable dans les deux cas d'applications aux extrémités ou au centre des forces parallèles, mais encore qu'elle est alors absolument invariable et indépendante de l'action persistante des forces parallèles? — Pour cela, dirais-je, il faudrait que cette forme définitive, une fois produite, se trouvât, sous le rapport de son invariabilité, dans la même condition que si ses parties se trouvaient toutes dans un seul tout continu et homogène, et, conséquemment, la résultante, alors aussi, devrait pouvoir s'appliquer à un point quelconque de la droite ou barre.

En considérant deux à deux les forces parallèles, on peut, en vertu des théorèmes que j'ai critiqués, trouver la résultante de tant de ces forces qu'on voudra, appliquées aux différents points d'un système quelconque de figure invariable ; mais, en réalité, dans l'hypothèse de l'invariabilité absolue du système, la résultante des forces parallèles qui y sont appliquées est à un point quelconque du système, et non pas seulement au point déterminé par l'application de ces théorèmes.

De ces mêmes théorèmes on a logiquement conclu celui-ci : *Si l'on considère un système de forces parallèles, appliquées à un assemblage de points* A, B, C, D, *etc.*, *et qu'on incline successivement tout le système de ces forces dans diverses situations, de manière que les mêmes forces passent toujours par les mêmes points, et conservent leurs*

grandeurs et leur parallélisme, les résultantes générales qu'on trouvera successivement dans chacune de ces positions se croiseront toutes au même point, et ce point d'intersection des résultantes successives a reçu le nom de *centre des forces parallèles.* Visiblement, ce théorème pèche comme ceux dont on l'a déduit.

De même que l'on a composé, ainsi que nous l'avons vu, en une seule, deux ou plusieurs forces parallèles, on a pu réciproquement décomposer une force quelconque en deux ou plusieurs autres; mais je fais à la décomposition ainsi conçue des reproches analogues à ceux que j'ai adressés à la composition des forces parallèles, telle qu'on la conçoit. Etant supposé que la force donnée est appliquée à une droite ou système absolument inflexible, invariable, on peut la concevoir comme composée d'autant de forces parallèles qu'on voudra dont la somme sera égale à cette force donnée, mais qui pourront être appliquées à des points quelconques de la droite ou système invariable ; or ce n'est point ainsi que l'on entend la décomposition dont il s'agit.

§ III. — Composition des forces dont les directions concourent en un même point.

On admet justement que *la résultante de deux forces quelconques* P *et* Q *appliquées à un même point* A, *sous un angle quelconque, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme* ABCD, *construit sur les deux lignes* AB, AC *qui représentent ces forces en grandeur et en direction.*

Plusieurs démonstrations de ce théorème ont été proposées, mais elles ne sont pas toutes exactes, rigoureuses.

Poinsot, p. 21, n° 33, commence par présenter un raisonnement tendant à montrer que *la résultante est dirigée suivant la diagonale du parallèlogramme* ABCD ; mais, pour cela, il invoque le théorème qu'il a précédemment présenté sur la résultante de deux forces parallèles appliquées aux extrémités d'une droite rigide, inextensible. Y considérant deux forces parallèles P et Q', il place leur résultante à un certain point D de la droite qui joint leurs points d'application, et sa démonstration implique que cette résultante ne peut être appliquée à un autre point de la droite; ce qui ne peut être vrai, dans l'hypothèse d'une droite absolument inflexible, inextensible.

L'auteur arrive ensuite a conclure que la résultante cherchée est représentée en grandeur par la diagonale elle-même; mais, en somme, la démonstration n'est pas satisfaisante, puisqu'elle s'appuie sur une fausse doctrine.

Dans les leçons de mécanique analytique publiées par l'abbé Moigno, d'après Cauchy, se trouve une démonstration que je vais reproduire dans ses points les plus importants.

L'auteur démontre ce lemme : *La résultante* R *de deux forces* P, Q *qui se coupent à angle droit, est représentée en grandeur par la diagonale du rectangle construit sur les deux composantes, en sorte qu'on a* $R^2 = P^2 + Q^2$.

Puis il passe au lemme suivant : *La résultante* Q *de deux forces* P *et* Q, *qui se coupent à angle droit, est représentée non-seulement en grandeur, ainsi qu'on vient de le*

prouver, mais encore en direction par la diagonale du rectangle construit sur les deux composantes.

Pour le démontrer, l'auteur raisonne ainsi :

« Cette proposition est évidente dans le cas où les forces P, Q sont égales entre elles, car alors la résultante R, devant nécessairement diviser l'angle PQ en deux parties égales, coïncide avec la diagonale du carré construit sur les deux forces, et le lemme précédent donne $R^2 = 2P^2$, $R = P\sqrt{2}$.

» Cette même proposition se démontre encore facilement dans le cas où l'on suppose $Q^2 = 2P^2$, ou $Q = P\sqrt{2}$. En effet, considérons trois forces égales P dirigées suivant trois droites qui soient perpendiculaires l'une à l'autre. Ces trois forces seront représentées par trois arêtes d'un cube qui aboutiront à un même sommet. De plus, la résultante de deux de ces forces étant égale à $P\sqrt{2}$, et dirigée suivant la diagonale d'une des faces du cube, la résultante R des trois forces sera nécessairement comprise dans tout plan qui renfermera l'une des forces P, et la diagonale du carré construit sur les deux autres. Or il existe trois plans de cette espèce, et ces trois plans se coupent suivant la diagonale du cube. Donc la résultante des trois forces P, ou ce qui revient au même, la résultante des forces P et $P\sqrt{2}$, qui se coupent à angles droits, sera dirigée suivant la diagonale du rectangle construit sur les forces P et $P\sqrt{2}$.

» On prouverait absolument de la même manière que si l'on désigne par m un nombre entier, et si l'on suppose le lemme en question démontré dans le cas où l'on a $Q = P\sqrt{m}$, la résultante de trois forces respectivement équivalentes à P, P, $P\sqrt{m}$, et représentées par trois droites perpendiculaires entre elles, sera dirigée suivant la

diagonale du parallélipipède rectangle qui aura pour côtés ces mêmes droites. On en conclut que, dans l'hypothèse admise, le lemme subsistera encore, si l'on prend pour Q la résultante des forces P et $P\sqrt{m}$, c'est-à-dire si l'on fait $Q = P\sqrt{m+1}$. D'ailleurs, le lemme est évident quand on a $Q = P$ ou, ce qui revient au même, $m = 1$. Donc ce lemme subsistera encore si l'on prend $Q = P\sqrt{1+1} = P\sqrt{2}$, ou $Q = P\sqrt{2+1} = P\sqrt{3}$,.... ou en général $Q = P\sqrt{m}$, m étant un nombre entier quelconque.

» Concevons maintenant que, m et n désignant deux nombres entiers, on construise un parallélipipède rectangle qui ait pour côtés trois droites propres à représenter les trois forces P, $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$. La résultante de ces trois forces sera évidemment comprise : 1° dans le plan qui renferme la force $P\sqrt{n}$ et la diagonale $P\sqrt{m+1}$ du rectangle construit sur les forces P, $P\sqrt{m}$; 2° dans le plan qui renferme la force $P\sqrt{m}$ et la diagonale $P\sqrt{n+1}$ du rectangle construit sur les forces P, $P\sqrt{n}$. Donc cette résultante sera dirigée suivant la diagonale du parallélipipède, et le plan qui renferme la même résultante avec la force P, coupera le plan des deux forces $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$ suivant la diagonale du rectangle construit sur ces deux forces. Donc la résultante des forces $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$, qui doit évidemment être comprise dans le plan dont il s'agit, sera dirigée suivant cette dernière diagonale. Donc le lemme subsistera quand on remplacera les forces P et Q par deux forces égales à $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$, c'est-à-dire par deux forces dont les carrés soient entre eux dans le rapport de m à n; donc le lemme subsistera encore entre les forces P et Q si l'on suppose

$$\frac{Q^2}{P^2} = \frac{m}{n} \text{ ou } Q = P\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

» Soit maintenant $Q = Px$, x désignant un nombre quelconque. On pourra faire varier les nombres entiers m et n, de manière que le rapport $\frac{m}{n}$ converge vers la limite x^2, et il est clair que, dans ce cas, la résultante des forces P, $P\sqrt{\frac{m}{n}}$, dirigées suivant deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, tendra de plus en plus à se confondre en grandeur et en direction, d'une part avec la résultante des forces P, Px, et d'autre part avec la diagonale du rectangle construit sur ces deux forces. Donc la résultante des forces P, Px, sera représentée par la diagonale dont il s'agit.

» Corollaire I. Si la force R est représentée par la longueur AB (fig. 16), portée, à partir de son point d'application, sur la droite suivant laquelle elle agit, et si l'on mène par le point A deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, on pourra substituer à la force R ou AB les deux forces représentées en grandeur et en direction par les projections AC, AD de la droite AB sur les deux axes.

» Corollaire II. Concevons maintenant que deux forces P, Q étant appliquées à un même point A et représentées par deux droites AB, AC (fig. 16), qui forment entre elles un angle quelconque, on trace, dans le plan de ces deux forces, deux axes dont l'un coïncide avec la diagonale du parallélogramme auquel elles servent de côtés, et dont l'autre soit perpendiculaire à cette diagonale : on pourra substituer aux deux forces P, Q les quatre forces représentées en grandeur et en direction par les projections AB', AB'', AC', AC'', des droites AB, AC, sur les deux axes. Or de ces quatre forces, deux étant direc-

tement opposées et égales, se feront équilibre ; les deux autres dirigées suivant la diagonale du parallélogramme s'ajouteront et donneront pour somme une force représentée en grandeur et en direction par cette même diagonale, puisque $AC' = B'D$... »

Tout considéré, cette démonstration est admissible ; mais il n'en est pas ainsi de celle que Poisson a présentée, t. 1er, p. 45, seconde édition, de son Traité de Mécanique :

« La résultante de deux forces égales, dit-il, coupe toujours en deux parties égales l'angle compris entre leurs directions ; car il n'y aurait pas de raison pour qu'elle se rapprochât davantage de l'une de ces deux forces, ni pour que sa direction s'écartât de leur plan plutôt d'un côté que de l'autre ; sa direction est donc connue et nous n'aurons que sa grandeur à déterminer.

» Soient, pour y parvenir, MA et MB (fig. 18), les directions des composantes dont la valeur commune sera représentée par P. Soient aussi $2x$ l'angle AMB, et MD la direction de la résultante, de sorte qu'on ait $AMD = BMD = x$. Son intensité ne peut dépendre que des quantités P et x ; en la désignant donc par R, nous aurons

$$R = f(P, x).$$

Dans cette équation, R et P sont les seules quantités dont l'expression numérique varie avec l'unité de force ; d'après le principe de l'homogénéité des quantités, il faut donc que la fonction $f(P, x)$ soit de la forme $P\varphi x$. Ainsi l'on a

$$R = P\varphi x ;$$

et la question se réduit à déterminer la forme de la fonction φx.

» Pour cela, je mène arbitrairement par le point M les quatre lignes MA′, MA″, MB′, MB″ ; je suppose les quatre angles A′MA, A″MA, B′MB, B″MB, égaux entre eux, et je représente chacun d'eux par z. Je décompose la force P dirigée suivant MA, en deux forces égales dirigées suivant MA′ et MA″ ; c'est-à-dire que je regarde la force P comme la résultante de deux forces égales dont la valeur est inconnue et qui agissent suivant MA′ et MA″ ; en désignant cette valeur par Q, j'aurai

$$P = Q\varphi z ;$$

car il doit exister entre les quantités P, Q, z, la même relation qu'entre les quantités R, P, x. Je décompose de même la force P dirigée suivant MB, en deux forces Q, dirigées suivant MB′ et MB″ ; de cette manière, les deux forces P se trouvent remplacées par les quatre forces Q ; par conséquent, la résultante de celles-ci devra coïncider, en grandeur et en direction, avec la force R, résultante des deux forces P.

» Or, en appelant Q′ la résultante des deux forces Q, dirigées suivant MA′ et MB′, et observant que A′MD $=$ B′MD $= x - z$, cette force Q′ sera dirigée suivant MD, et l'on aura

$$Q' = Q\varphi\,(x - z).$$

De même la résultante des deux autres forces Q sera encore dirigée suivant MD, puisque cette droite coupe aussi l'angle A″MB″ en deux parties égales ; et à cause de A″MD $=$ B″MD $= x + z$, on aura

$$Q'' = Q\varphi\,(x + z) ;$$

Q'' désignant cette seconde résultante. Les deux forces Q' et Q'' étant dirigées suivant la même droite MD, leur résultante qui est aussi celle des quatre forces Q, sera donc égale à leur somme ; par conséquent, on doit avoir

$$R = Q' + Q''.$$

Mais on a déjà

$$R = P\varphi x = Q\varphi z\varphi x ;$$

et en substituant cette valeur de R et celles de Q' et Q'' dans l'équation précédente, et supprimant le facteur Q commun à tous les termes, il vient

$$\varphi x\varphi z = \varphi (x + z) + \varphi (x - z). \quad (1)$$

C'est cette équation qui nous reste à résoudre pour en déduire l'expression de φx.

» On voit d'abord qu'on y satisfait en prenant

$$\varphi x = 2 \cos ax ;$$

a étant une constante arbitraire, de sorte qu'on ait en même temps,

$$\varphi x = 2 \cos az ;$$
$$\varphi (x + z) = 2 \cos a (x + z),$$
$$\varphi (x - z) = 2 \cos a (x - z) ;$$

et effectivement, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1), on obtient l'équation connue

$$2 \cos ax \cos az = \cos a (x + z) + \cos a (x - z).$$

Or, je dis que cette expression de la fonction φx est la

seule qui satisfasse à l'équation (1), et que de plus, dans la question qui nous occupe, la constante a est l'unité ; en sorte que l'on a

$$\varphi x = 2 \cos x. \qquad (2)$$

» Cela est évident quand $x = o$; car alors les directions des deux forces P coïncident, et la résultante R est égale à 2P, ce qui suppose $\varphi x = 2$. Admettons qu'il y ait une autre valeur α de x, pour laquelle on ait aussi $\varphi \alpha = 2 \cos \alpha$; je dis que l'équation (2) subsistera également pour toutes les valeurs 2α, 3α, $4\alpha, \ldots$, $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$, $\frac{1}{8}\alpha, \ldots$, de x, et généralement pour

$$x = \frac{m\alpha}{2^n}; \qquad (3)$$

m et n étant des nombres entiers quelconques.

» En effet, si l'équation (2) se vérifie pour les trois angles x, z, $x - z$, de manière qu'on ait

$$\varphi x = 2 \cos x,\ \varphi z = 2 \cos z,\ \varphi (x - z) = 2 \cos (x - z),$$

elle aura encore lieu pour un quatrième angle $x + z$; car, en vertu de l'équation (1), on aura alors

$$\varphi (x + z) = 4 \cos x \cos z - 2 \cos (x - z) ;$$

équation qui se réduit à

$$\varphi (x + z) = 2 \cos (x + z).$$

Ainsi l'équation (2) ayant lieu pour $x = o$ et $x = \alpha$, il s'ensuit qu'elle subsiste pour $x = 2\alpha$; ayant lieu pour $x = \alpha$ et $x = 2\alpha$, elle subsistera pour $x = 3\alpha$; et, en continuant de même, on verra qu'elle aura lieu pour $x = m\alpha$.

» Je fais maintenant $m\alpha = 6$; on aura donc

$$\varphi 6 = 2 \cos 6 ;$$

et delà on conclura que l'équation (2) aura encore lieu pour $x = \frac{1}{2} 6$; car en faisant $x = z = \frac{1}{2} 6$, l'équation (1) deviendra

$$(\varphi \tfrac{1}{2} 6)^2 = 2 \cos 6 + 2.$$

d'où l'on tire

$$\varphi \tfrac{1}{2} 6 = 2 \cos \tfrac{1}{2} 6.$$

En faisant ensuite $x = z = \frac{1}{4} 6$, on aura, d'après l'équation (1) et cette dernière,

$$(\varphi \tfrac{1}{4} 6)^2 = 2 \cos \tfrac{1}{2} 6 + 2 \varphi \tfrac{1}{4} 6 = 2 \cos \tfrac{1}{4} 6 ;$$

et, en continuant ainsi, l'équation (2) sera démontrée pour $x = \frac{6}{2^n}$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de x comprises dans la formule (3).

» Or, les nombres m et n étant aussi grands qu'on voudra, et pouvant même devenir infinis, on peut faire croître ces valeurs de x par degrés infiniment petits. La formule (3) comprend donc toutes les valeurs possibles de l'angle x, et l'équation (2) est complétement démontrée, si toutefois elle est vraie pour une valeur particulière $x = \alpha$, différente de zéro. Mais, d'après le théorème du n° 25, la résultante R est égale à P, dans le cas de $x = 60^\circ$; on a donc alors

$$\varphi x = 1 = 2 \cos 60^\circ ;$$

donc l'équation (2) a lieu pour $x = 60^\circ$, et conséquemment pour toutes les valeurs de x.

» Au moyen de cette équation, on aura

$$R = 2P \cos x.$$

Si donc la résultante R et les deux composantes P sont représentées, comme dans le n° 25, par des droites prises sur leurs directions respectives, à partir de leur point d'application, la force R sera le double de la projection de P sur sa direction, ou égale à la diagonale du losange construit sur les forces P.

» Soient maintenant deux forces inégales P et Q appliquées au point M (fig. 19) suivant les directions MA et MB; représentons leurs intensités par les lignes MG et MH, prises sur leurs directions, et achevons le parallélogramme MGKH : il y aura deux cas à considérer, le premier où l'angle AMB sera droit, le second où il sera aigu ou obtus.

» Dans le premier cas, tirons les deux diagonales MK et GH qui se coupent au point L; par les points G et H, menons les parallèles GN et HO à ML, qui rencontrent en N et O la parallèle à GH, menée par le point M. Le point L est le milieu de MK et de GH; et comme, dans un rectangle les deux diagonales sont égales, il s'ensuit qu'on a

$$GL = LH = LM.$$

» Les deux parallélogrammes GLMN et HLMO sont donc des losanges; par conséquent, d'après la proposition précédente, la force MG pourra être regardée comme la résultante des deux forces MN et ML, et la force MH comme la résultante de MO et ML. Donc, en substituant aux deux forces données leurs composantes, nous aurons, au lieu de MH et MG, les deux forces MN

et MO, qui se détruisent, puisqu'elles sont égales et contraires, et les deux forces ML, qui s'ajoutent et donnent une résultante représentée en grandeur et en direction par la diagonale MK.

» Dans le second cas, menons par les points G et H (fig. 20) les perpendiculaires GE et HF à la diagonale MK, et les parallèles GN et HO à cette même droite ; par le point M, menons aussi la perpendiculaire NMO à cette droite MK. Les deux parallélogrammes GEMN et HFMO seront des rectangles qui auront leurs côtés MN et MO égaux, comme étant les hauteurs des deux triangles égaux GMK et HMK. D'après le premier cas, on pourra remplacer les forces MG et MH par leurs composantes rectangulaires ME et MN, MF et MO ; au lieu des deux forces données, on aura donc les deux forces MN et MO qui se détruiront comme étant égales et contraires, et les deux forces ME et MF de même direction, qui s'ajouteront et donneront, à cause de ME = FL, une résultante représentée en grandeur et en direction par la diagonale MK.

» Concluons donc que la résultante de deux forces quelconques appliquées en un même point et représentées par des lignes prises sur leurs directions à partir de ce point, est représentée en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces données. »

Je l'ai déjà dit, cette démonstration n'est pas acceptable. Poisson n'est point dans le vrai en disant que dans l'expression $\frac{m\alpha}{2^n}$ *les nombres* m *et* n *étant aussi grands qu'on voudra, et pouvant même devenir infinis, on peut faire croître les valeurs de x par degrés infiniment petits,*

et en concluant que cette formule comprend toutes les valeurs possibles de l'angle ω. Un nombre ne saurait devenir *infini*, et l'on ne peut faire croître une valeur par degrés *infiniment petits*. Maintenant, sans supposer un accroissement vraiment infinitésimal, peut-on admettre que, dans l'équation $x = \frac{m\alpha}{2^n}$, m et n peuvent varier de manière que cette formule comprenne toutes les valeurs possibles de x? non certes : il est une foule de fractions ou nombres fractionnaires qui ne sauraient être exprimés par un rapport de forme $\frac{m}{2^n}$, c'est-à-dire par un nombre entier divisé par une puissance entière de 2. Tels sont tous ceux dont les deux termes sont des nombres premiers différents et dont le dénominateur est autre que 2 et 1. Comment, par exemple, exprimer ainsi les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$ ou les nombres fractionnaires $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{11}{9}$. On peut varier les expressions de ces quantités de manière à leur donner pour dénominateurs des nombres qui s'éloignent relativement fort peu d'être des puissances de 2, mais jamais on ne pourrait leur en donner qui fussent exactement des puissances de ce nombre. La formule en question ne pourrait donc comprendre, dans son expression, des angles qui seraient le tiers, les trois cinquièmes, les cinq septièmes, les cinq tiers, etc., de l'angle donné α ; elle ne pourrait donner que des approximations plus ou moins grandes de ces quantités. D'ailleurs dans l'expression $\frac{m\alpha}{2^n}$, α est une constante, et quelles que soient les valeurs qu'on donne à m et n, les fractions ou nombres fractionnaires représentés par $\frac{m}{2^n}$ sont commensurables

8

entre eux, car ils peuvent toujours être réduits à un même dénominateur. Il s'ensuit que toutes les valeurs de x données par l'expression $\frac{m\alpha}{2^n}$ seraient nécessairement commensurables entre elles ; elles ne comprendraient donc par les valeurs de x incommensurables avec celles-ci ; donc la formule, à ce point de vue encore, ne saurait comprendre, comme on le dit, toutes les valeurs possibles de l'angle x.

Tout considéré, il faut s'égarer, se perdre dans le monde des infiniment petits, pour se contenter d'une telle démonstration, qui, à mon sens, est insoutenable, est profondément vicieuse.

Il est une démonstration plus simple qui est présentée dans le traité de physique de M. Daguin, t. 1, p. 51. Là est démontrée d'abord la règle du parallélogramme des vitesses, de la manière suivante :

« Considérons un point matériel *a* qui parcourt d'un mouvement uniforme une droite *ab* (fig. 21), pendant que cette droite se transporte parallèlement à elle-même, aussi d'un mouvement uniforme, et de manière que son extrémité *a* parcoure la ligne droite *ac*. Le point matériel sera animé de deux vitesses simultanées, l'une sur la droite *ab*, l'autre due au déplacement de cette droite, et le mouvement résultant de la combinaison de ces deux vitesses, se nomme *mouvement composé*.

» Il résulte de l'observation, que le mouvement du point sur la droite n'est pas modifié par celui de cette dernière ; et, en général, que les vitesses qui animent simultanément un point matériel ne se modifient pas mutuellement.

» Supposons que le point matériel *a* parcoure l'espace

ab = *cd*, pendant le temps *t* que met la droite *ab* à venir de *ab* en *cd* ; ce qui veut dire que les espaces *ab*, *ac* sont entre eux comme la vitesse du point sur la droite *ab*, et la vitesse de celle-ci parallèlement à elle-même. On voit que le point sera arrivé en *d* au bout de ce temps *t* ; et comme on peut dire la même chose à tous les instants du mouvement, le mobile aura parcouru d'un mouvement uniforme la diagonale *ad*. Il résulte aussi de là que la vitesse suivant *ad* dans le mouvement composé, ou *vitesse résultante*, sera représentée par la longueur de cette diagonale, si les longueurs *ab* et *ac* représentent la vitesse du point sur la droite *ab*, et la vitesse de celle-ci parallèlement à elle-même. »

De là l'auteur est conduit à la règle du parallélogramme des forces.

« Considérons, dit-il, deux forces concourantes appliquées en A (fig. 22) et dirigées suivant AB et AC ; soient AB et AC les vitesses que ces forces imprimeraient séparément au corps dans un temps très-petit θ. La vitesse du mouvement composé résultant de l'action simultanée des forces sera représentée par la diagonale AR, et la résultante devant produire le même effet que les composantes réunies, sera capable de donner cette vitesse au corps, pendant le temps θ ; elle devra donc être dirigée suivant AR. De plus, les forces, agissant sur une même masse, sont entre elles comme les vitesses imprimées après le même temps. Si donc AB et AC représentent les intensités des composantes, la longueur AR représentera l'intensité de la résultante. On voit donc que *la résultante de deux forces concourantes est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme ayant pour côtés les longueurs qui représentent ces forces.* »

Cette démonstration est suffisante ; toutefois, j'ai à faire une observation, une réserve. Etant supposé que deux forces sont appliquées à un point matériel, et qu'on représente ces forces par des droites proportionnelles à ces même forces et dirigées comme elles, il est certain qu'elles doivent avoir une résultante représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme formé par ces droites comme on l'a dit. L'on n'a même pas besoin, pour fonder le théorème, d'invoquer l'expérience, et ce principe admis, que des forces agissant sur une *même masse* sont entre-elles comme les vitesses imprimées après le même temps, comme le fait M. Daguin. Il peut bien se faire que quand un corps est soumis à deux forces appliquées à un de ses points, son mouvement ne soit pas précisément représenté en direction et intensité par la diagonale du parallélogramme de ces forces ; car les forces moléculaires de ce corps et même d'autres forces extérieures quelconques peuvent influer sur son mouvement ; mais cela ne saurait infirmer le principe dont il s'agit. Il n'en est pas moins vrai que deux forces appliquées à un même point matériel se composent, pour ce point, d'après la règle du parallélogramme des forces ; seulement, d'autres forces, connues ou inconnues, peuvent concourir au mouvement effectif et modifier ainsi la direction et l'intensité du mouvement qui, sans cela, serait conforme à la résultante des deux forces données. Le principe de la proportionnalité des forces et des vitesses n'est certain, incontestable, que pour le cas où le corps soumis aux forces serait une seule masse continue, de forme absolument invariable, et alors le principe serait vrai, quelle que fût la masse du corps, ainsi que je l'ai dit précé-

demment. Or un point matériel doit être regardé comme une petite masse continue, invariable dans son étendue et sa forme, et l'on conçoit bien qu'il soit tel, en prenant pour le représenter une seule partie élémentaire d'un corps. Ainsi modifiée, entendue, la démonstration que j'examine est satisfaisante.

On voit qu'elle ne pèche pas comme celles relatives à la composition des forces parallèles. Il est facile de saisir la différence. Le point matériel, étant supposé être une partie élémentaire, est invariable, inextensible, et conséquemment les forces quelconques qui agissent sur ce point se composent entre elles suivant la règle du parallélogramme des forces : ici pas de difficulté. Mais le corps à divers points duquel des forces parallèles sont appliquées n'est pas absolument invariable dans sa forme, et d'ailleurs, si on le suppose tel, contrairement aux faits, à l'observation, la résultante des forces parallèles appliquées à ce corps devra pouvoir être appliquée à un de ses points quelconques, contrairement aux théorèmes que j'ai critiqués.

Dans le *Cours de Mécanique de l'Ecole polytechnique,* de M. Sturm, t. 1, p. 3, je trouve une démonstration que je crois devoir reproduire.

« Soit un losange ABCD (fig. 23), de forme invariable : appliquons aux points A et C quatre forces égales dirigées suivant les côtés AB, AD, CB, CD. On peut regarder comme évident que les forces égales appliquées en A donnent une résultante dirigée suivant la bissectrice AC de l'angle BAC, et que les forces appliquées en C donnent une résultante égale et directement opposée à la première. Le système reste donc en équilibre sous l'action des quatre forces.

» Cela posé, soit f une commune mesure aux forces P et Q (appliquées au point A), et admettons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$P = 4f, \; Q = 3f;$$

partageons AB (fig. 24) en quatre parties égales et AC en trois parties égales entre elles et par conséquent égales aux premières. Menons EH, FI, GK parallèles à AC, et MS, LN parallèles à AB.

» Nous ne troublerons pas l'état du système en appliquant aux sommets L et E, M et F, C et G, H et B, I et N, K et S des losanges LE, MF, CG, HB, IN, KS, et suivant les côtés de ces losanges, des forces égales à F. Mais les forces égales et contraires appliquées aux extrémités des droites HE, IF, KG, MS, LN se détruisent. Donc il ne reste que quatre forces égales à f dirigées suivant CD, et trois forces égales à f dirigées suivant BD. Les quatre premières se composent en une seule égale à P, que l'on peut supposer appliquée au point D, et de même les trois autres donnent une résultante égale à Q et appliquée au même point D.

» Il résulte de là que le système des deux forces P et Q appliquées en A peut être remplacé par deux forces P et Q appliquées au point D. Donc la résultante passe par le point D; mais elle passe déjà par le point A; donc elle est dirigée suivant AD.

» Nous avons supposé que les forces P et Q étaient commensurables entres elles; si elles étaient incommensurables, en employant un mode de raisonnement bien connu, on ferait voir que, dans ce cas, la résultante est encore dirigée suivant la diagonale AD.

» Après avoir trouvé la direction de la résultante, il

reste à montrer que sa grandeur est représentée par la longueur de la diagonale AD.

» Imaginons une force AE (fig. 25) égale à la résultante inconnue et dirigée suivant le prolongement de la diagonale AD. Cette force fera équilibre aux forces P et Q. Par conséquent la résultante des forces P et AE sera dirigée dans le prolongement AF de la droite AC. Or, d'après le numéro précédent, cette direction doit être celle de la diagonale du parallélogramme AEFB. Donc les deux triangles AEF, DAC seront égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : EF = CD, puisque EF = AB = CD ; les angles AFE et ACD égaux comme alternes internes ; les angles AEF et ADC égaux par la même raison. Donc AE = AD. Donc la diagonale représente bien l'intensité de la résultante. »

Cette démonstration est rationnelle. Il est vrai que, pour démontrer sa première partie, relative à la direction de la résultante, on suppose des forces appliquées à un système de points séparés et invariablement liés entre eux, et que sans doute la nature ne nous offre pas des corps, des molécules dans cette condition de liaison absolue. Mais cette hypothèse étant posée, la démonstration est rigoureuse. D'ailleurs, une molécule *élémentaire* est un tout continu invariable, inextensible, dans lequel on peut, par la pensée, considérer autant de points qu'on voudra, placés comme on voudra, et auquel par conséquent on peut appliquer le raisonnement dont il s'agit. La démonstration est donc réellement fondée, quelles que soient d'ailleurs les forces qui agissent sur un même point dans la molécule élémentaire ou en dehors de cette molécule.

Il est une autre démonstration qui a beaucoup d'ana-

logie avec celle-ci et qui est contenue dans le cours abrégé de Mécanique de M. Leclert, p. 72 et 78. Elle est également rationnelle et admissible.

Visiblement, par l'application de la règle du parallélogramme des forces, on peut déterminer la résultante de tant de forces qu'on voudra, appliquées à un même point A, et dirigées arbitrairement dans l'espace. En effet, la résultante de deux des forces données pourra se composer avec une autre force ; l'on aura ainsi une nouvelle résultante composable avec une autre force, et ainsi de suite, jusqu'à l'épuisement des forces données.

Visiblement aussi, d'après ce qui précède, on peut décomposer une force donnée R en deux autres P et Q dirigées suivant des lignes données AP, AQ (fig. 24), pourvu que ces directions et celle de la force R soient comprises dans un même plan et concourent en un même point A. Les composantes P et Q ainsi obtenues, on pourra de même décomposer chacune d'elles, et de cette manière arriver à décomposer une force en tant d'autres qu'on voudra suivant des directions quelconques.

On montre aisément, en appliquant la règle du parallélogramme des forces, que si trois forces X, Y, Z, appliquées à un même point A (fig. 24) dans l'espace, sont représentées par les trois lignes AB, AC, AD et qu'on achève le parallélipipède A... F, la résultante R de ces trois forces sera représentée par la diagonale AF de ce parallélipipéde.

§ 4. — Composition et décomposition des couples.

Poinsot a nommé *couple* l'ensemble de deux forces, telles que P, —P (fig. 26), égales parallèles et contraires,

mais appliquées à divers points d'une droite rigide, inextensible. La perpendiculaire commune AB, menée entre les directions des deux forces est *le bras de levier* du couple, et le produit $P \times AB$ de l'une des forces par le bras de levier en est *le moment*.

Pour fonder sa théorie des couples, il commence par établir que les deux forces P, — P d'un couple ne peuvent avoir de résultante ou, en d'autres termes, qu'il ne peut y avoir une force unique qui fasse équilibre à ces deux forces égales, parallèles et de sens opposés. Il raisonne ainsi :

« Imaginons, s'il est possible, qu'une force unique R fasse équilibre aux deux forces P et — P, parfaitement égales, parallèles et contraires.

» D'abord, quelle que soit la position de cette force unique à l'égard des deux proposées, on lui trouvera sur-le-champ, dans un sens contraire, une autre position toute semblable à l'égard des mêmes forces ; car tout est égal de part et d'autre. Si donc R fait équilibre aux deux forces P et — P, il y a une autre force — R égale, parallèle et de sens opposé, qui leur ferait ainsi équilibre. Ajoutez cette seconde force — R ; et, pour ne rien changer, détruisez-la immédiatement par une force R' égale et contraire. Il y aura donc équilibre entre les cinq forces R, P, — P, — R et R'. Mais il y a équilibre entre les trois forces P, — P et — R ; donc il y aurait équilibre entre les deux forces restantes R et R'; ce qui est impossible, puisque ces deux forces égales et parallèles agissent dans le même sens. Ainsi, les deux forces P et — P ne peuvent être tenues en équilibre par une simple force, et, par conséquent, elles n'ont point de résultante unique. »

Considérant un couple comme tendant à faire tourner son bras de levier sur son milieu, il pose ce lemme :

Un couple quelconque peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle et tourné comme on voudra dans ce plan, sans que son effet sur le corps auquel il est appliqué en soit changé, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement attaché au premier.

Pour démontrer cette proposition, il la décompose en deux autres.

« Soit d'abord, dit-il, le couple (P, — P) (fig. 27) appliqué perpendiculairement sur AB ; prenons où l'on voudra, dans le plan de ce couple ou dans tout autre plan parallèle, la droite CD, égale et parallèle à AB ; joignons AD et BC, qui seront dans un même plan, et se couperont visiblement au milieu I de leurs longueurs respectives ; et supposons enfin les droites AB et CD liées entre elles d'une manière invariable.

» Si l'on applique sur la ligne CD, parallèlement aux forces P et — P, deux couples contraires (P′, — P′), (P″, — P″) égaux entre eux et au couple proposé (P, — P), il est évident que ces deux couples se détruisent d'eux-mêmes, et que, par conséquent, l'effet du couple (P, — P) ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, il est facile de voir que les deux couples (P, — P), et (P″, — P″) se détruisent aussi d'eux-mêmes, car le point I étant à la fois le milieu des deux lignes AD et BC, les deux forces égales et parallèles P et P″, appliquées sur AD, donnent une résultante parfaitement égale et opposée à la résultante des deux forces — P et — P″, appliquées sur BC. On peut donc supprimer les deux couples (P, — P), (P″, — P″), et il ne reste plus que le

couple (P′, — P′), appliqué sur CD, lequel n'est autre chose que le couple primitif qu'on aurait, pour ainsi dire, transporté parallèlement à lui-même, de manière que son bras de levier AB fût venu dans la position parallèle CD. »

» Soit, en second lieu, le couple (P, — P) (fig. 28) appliqué perpendiculairement sur AB. Tirons dans le plan de ce couple, sous un angle quelconque avec AB, la droite CD = AB, et supposons que ces deux droites se coupent au milieu I de leurs longueurs respectives et soient invariablement fixées entre elles.

» Si l'on applique à angle droit sur CD deux couples contraires (P′, — P′), (P″, — P″) égaux entre eux et au couple proposé (P, — P), ces deux couples se détruiront d'eux-mêmes, et, par conséquent, l'effet du couple P, — P) ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, les deux couples (P, — P), (P″, — P″), se détruisent aussi d'eux-mêmes : car, avec un peu d'attention, on voit que les deux forces égales P et — P″, qui se rencontrent en G, donnent une résultante égale et directement opposée à la résultante des deux forces — P et P″ qui se rencontrent en H. On peut donc supprimer les deux couples (P, — P), (P″ — P″), et il ne reste plus que le couple (P′ — P′) appliqué sur CD, lequel n'est, pour ainsi dire, que le couple primitif qu'on aurait tourné dans son plan, de manière que son bras de levier AB fût venu dans la position oblique CD. »

De ces deux propositions réunies, l'auteur conclut aisément le lemme en question.

De là passant à la transformation des couples et à leur mesure, il pose cet autre lemme :

Un couple quelconque (P, — P) (*fig.* 29) *appliqué sur*

un bras de levier AB, *peut être changé en un autre* (Q, — Q) *de même sens, appliqué sur un bras de levier* BC *différent du premier, pourvu qu'on ait* P : Q :: BC : AB, *ou* $P \times AB = Q \times BC$, *c'est-à-dire pourvu que les moments de cès couples soient égaux.*

« Prenons, en effet, dit-il, sur le prolongement de AB une partie quelconque BC, et appliquons sur BC, parallèlement aux forces P et — P, deux couples (Q, — Q), (Q′, — Q′) égaux et contraires : leur effet sera absolument nul, et, par conséquent, celui du couple (P, — P) ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, si l'on suppose que les forces P et Q, et, par conséquent, P et Q′, sont en raison inverse des lignes AB et BC, leur résultante qui est égale à P + Q′, passe en B, et détruit évidemment les forces contraires — P, — Q′ qui s'y trouvent. On peut donc supprimer les quatre forces P, Q′, — P, — Q′, et il ne reste plus que le couple (Q, — Q) appliqué sur BC, lequel remplace le couple proposé (P, — P) appliqué sur AB. »

Poinsot conclut, comme corollaire de ce lemme, que les effets des couples sont proportionnels à leurs moments.

« En effet, dit-il, on peut voir d'abord que deux couples (P, — P), (Q, — Q) (fig. 30), qui agissent sur les bras de leviers égaux AB, CD, sont entre eux comme les forces P et Q de ces couples : car, si l'on suppose les forces P et Q entre elles comme deux nombres entiers, comme 5 et 3, par exemple, en partageant chaque force P et — P en 5 forces égales, et chaque force Q et — P en trois forces égales entre elles et aux premières, on pourra considérer le couple (P, — P) comme la somme de 5 couples égaux et de mêmes sens, appliqués parfai-

tement l'un sur l'autre, et le couple (Q, — Q) comme la somme de trois couples égaux entre eux et aux premiers, aussi appliqués l'un sur l'autre. Les intensités des couples (P, — P), (Q, — Q). seront donc entre elles comme 5 et 3, ou comme P à Q. Si les forces P et Q sont incommensurables, on fera le raisonnement connu.

» Maintenant soient deux couples quelconques (P, — P), (Q, — Q), soient p le bras de levier du premier, et q le bras de levier du second : le couple (Q, — Q), agissant sur la ligne q, est équivalent au couple $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$, qui agirait sur la ligne p; car les moments sont égaux de part et d'autre, le premier étant Qq, et le second $\frac{q}{p}Qp = Qq$. Ainsi, au lieu des deux couples proposés, on a ces deux-ci (P, — P), $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$ qui ont un même bras de levier p. Mais les intensités M et N de ces deux couples sont entre elles comme leurs forces, et, par conséquent, l'on a $M:N::P:\frac{q}{p}Q$, ou bien $M:N::Pp:Qq$.

» Puisque deux couples sont entre eux dans le rapport de leurs moments, il s'ensuit que le moment d'un couple est la mesure de son effort ou de son intensité : car si l'on prend pour unité de couple celui qui est composé de deux forces égales à l'unité de force, appliqué sur un bras de levier égal à l'unité de ligne, le couple (P, — P) au bras de levier p contiendra autant de fois l'unité de couple que le moment $P \times p$ contiendra le moment 1×1, c'est-à-dire contiendra l'unité. »

L'auteur, s'occupant ensuite de la composition des couples, présente ce premier théorème :

Deux couples situés comme on voudra dans le même plan ou dans des plans parallèles, se composent toujours en un seul, qui est égal à leur somme, s'ils tendent à faire tourner dans le même sens, ou égal à leur différence s'ils tendent à faire tourner en sens contraires.

« En effet, dit-il, on peut d'abord ramener ces deux couples dans un même plan, ensuite ramener leurs forces au parallélisme, enfin les changer en deux autres équivalents qui auraient un même bras de levier, et alors les appliquer l'un sur l'autre.

» Soient P et Q les forces composantes des deux couples, p et q leurs bras de levier respectifs; et soit D la longueur du bras de levier commun aux deux couples transformés. Au lieu du couple (P, —P) au moment Pp, on substituera le couple équivalent (P′, —P′), dont le moment P′D serait égal à Pp. On substituera de même, à la place du couple (Q, —Q) au moment Qq, le couple (Q′, —Q′) au moment $Q'D = Qq$; et ces deux couples transformés étant appliqués l'un sur l'autre, sur le même bras de levier D, on aura un couple unique résultant [(P′+Q′), —(P′+Q′)], dont le moment sera

$$(P'+Q')D, \text{ ou } P'D + Q'D = Pp + Qq.$$

» Ainsi le moment résultant sera égal à la somme des moments composants, ou bien à leur différence, selon que les forces P′ et Q′, qui agiront à la même extrémité du bras de levier D, seront de même sens ou de sens contraires. »

Puis Poinsot en tire le corollaire suivant :

« On voit donc, en combinant ainsi les couples deux à deux, que tant de couples qu'on voudra, situés d'une

manière quelconque dans un même plan ou dans des plans parallèles, se réduiront toujours à un seul, égal à la somme de ceux qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme de ceux qui tendent à faire tourner dans le sens contraire. Et réciproquement, on pourra décomposer un couple donné en autant d'autres qu'on voudra, situés dans le même plan ou dans des plans parallèles. On pourra même prendre à volonté tous ces couples, hors un seul ; car il suffira que la somme de ceux qui agissent dans le même sens, moins la somme de ceux qui agissent en sens contraire, soit égale au couple proposé. »

Théorème 2.

Deux couples situés comme on voudra dans deux plans qui se coupent sous un angle quelconque, se composent toujours en un seul. Et si l'on représente les moments de ces couples par les longueurs respectives de deux droites tirées sous un angle égal à celui de deux plans, et qu'on achève le parallélogramme, le moment du couple résultant sera représenté par la diagonale de ce parallélogramme, et le plan de ce couple partagera l'angle que font entre eux les plans des couples composants, comme la diagonale du parallélogramme partage l'angle que font les deux côtés adjacents.

« Soient, en effet, dit Poinsot, les deux couples proposés, situés dans les deux plans AGM, AGN (fig. 31), qui se rencontrent suivant AG ; et supposons qu'on ait d'abord changé ces deux couples en deux autres respectivement équivalents, qui auraient un même bras de levier.

» En quelque lieu que soit situé le couple (P, — P) dans le plan AGM, on pourra le ramener dans ce plan à angle droit sur l'intersection AG, de manière que son bras de levier AB tombe sur l'intersection AG. De même, en quelque lieu que soit situé le couple (Q, — Q) dans le plan AGN, on pourra le ramener aussi à angle droit sur la même intersection, et de manière que son bras de levier, égal au premier, coïncide avec lui en AB.

» Alors les deux forces P et Q appliquées en A se composeront en une seule R appliquée au même point A, et représentée par la diagonale AR du parallélogramme construit sur les deux lignes AP, AQ, qui représentent les forces P et Q. Les deux forces — P, —Q, appliquées en B, se composeront aussi en une seule — R appliquée en B, parfaitement égale, parallèle et contraire à la première; et l'on aura, au lieu des deux couples (P, — P), (Q, — Q), le couple unique (R, — R) appliqué sur le même bras de levier AB.

» Puisque ces trois couples ont un même bras de levier, leurs moments respectifs sont proportionnels aux valeurs des trois forces P, Q, R. Donc, si l'on représente les moments des deux couples composants par les deux lignes AP, AQ qui leur sont proportionnelles, le moment du couple résultant sera représenté par la diagonale AR du parallélogramme APRQ construit sur ces lignes. Or, il est visible que les angles formés par les trois lignes AP, AQ, AR, mesurent les angles que font les trois plans ; donc le plan du couple résultant partage l'angle des deux autres plans, comme la diagonale AR partage l'angle PAQ des deux côtés adjacents AP, AQ. Donc, etc. »

Corollaire.

« On pourra donc toujours réduire à un seul tant de couples que l'on voudra, appliqués à un corps d'une manière quelconque dans l'espace; car, en les composant successivement deux à deux, comme nous venons de faire, on arrivera nécessairement à un couple unique dont on connaîtra le plan et la grandeur, et qui sera équivalent à tous les autres. Réciproquement, on peut toujours décomposer un couple en deux autres situés dans deux plans donnés, pourvu que ces plans et celui du couple proposé se rencontrent suivant une même droite (ou suivant des droites parallèles ; car, en transportant le plan de l'un de ces couples parallèlement à lui-même, ce qui est permis, on rassemblerait leurs trois intersections parallèles en une seule).....

» Au lieu de déterminer la position d'un couple par celle de son plan, on peut, dit Poinsot, la déterminer par la direction d'une droite quelconque perpendiculaire à ce plan et que l'on pourra nommer l'*axe du couple*. Puisqu'un couple peut être supposé appliqué où l'on voudra dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, il est visible que l'on connaîtra la position d'un couple dans l'espace, lorsque l'on connaîtra la direction de son axe : car, en élevant où l'on voudra sur cet axe un plan perpendiculaire, on pourra prendre ce plan pour celui du couple proposé. Ainsi la position de différents couples parallèles peut être donnée par une seule droite perpendiculaire à tous ces couples, et qui en sera, pour ainsi dire, l'axe commun. »

Dans cet ordre d'idées, Poinsot s'est livré à diverses

considérations ; il a, notamment, remplacé son second théorème par le suivant, qu'il a nommé le *parallélogramme des couples :*

Si deux couples L *et* M *sont représentés, pour leurs axes et pour leurs grandeurs, par les côtés* AL *et* AM *d'un parallélogramme* ALGM, *ces deux couples se composent en un seul* G *représenté, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale de ce parallélogramme.*

Sous ce titre : *Composition des forces dirigées comme on voudra dans l'espace,* Poinsot ajoute les considérations suivantes relatives aux couples :

« Soient tant de forces que l'on voudra, P, $P_{\prime}$ $P_{\prime\prime}$, etc., appliquées d'une manière quelconque dans l'espace à un corps ou système libre.

» Je considère d'abord l'une d'elles, la force P (fig. 32), par exemple, qui est appliquée au point B. Ensuite, au point A, arbitrairement pris dans ce corps, ou au dehors (pourvu qu'on l'y suppose invariablement fixé), j'applique deux forces contraires P', — P', égales et parallèles à la force P. Il est clair que je n'ai rien changé à l'état du système. Mais je puis considérer maintenant, au lieu de la force P appliquée en B, la force P' appliquée en A, et le couple (P, — P') agissant sur la droite AB. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs, dans un plan quelconque parallèle au sien, il ne restera au point A que la force P' égale et parallèle à la force P, et qui n'est en quelque sorte que cette même force P qu'on aurait transportée parallèlement à elle-même de B en A.

» Si l'on fait la même transformation pour toutes les forces du système à l'égard du même point A, il est manifeste que toutes ces forces viendront s'y réunir pa-

rallèlement à elles-mêmes, mais qu'il y aura de plus, dans le système, autant de couples appliqués provenant de chaque transformation. Or toutes les forces appliquées au point A se composeront en une seule R, et tous les couples en un seul couple (S, — S) (fig. 33) appliqué sur une certaine droite BC.

» Ce qui nous apprend que *tant de forces que l'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un corps, peuvent toujours se réduire à une seule force qui passe par un point donné à volonté, et à un seul couple, dont le plan sera, en général, incliné à la direction de la force.*

» Observons, sur-le-champ, que la quantité, la direction et le sens de la résultante R seront toujours les mêmes, en quelque lieu qu'on ait pris le point A. En variant la position de ce point, la résultante R ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en différents lieux de l'espace; mais le plan et la grandeur du couple résultant (S, — S) changeront nécessairement.

» Or, parmi cette infinité de réductions relatives à tous les points A de l'espace, il y en a une distinguée de toutes les autres, en ce que le plan du couple résultant est perpendiculaire à la direction de la résultante. C'est ce qu'on peut démontrer ici d'une manière très-prompte. Car, tout étant réduit à la seule force R et au seul couple (S, — S) par rapport à un point connu A, imaginez qu'on décompose ce couple (S, — S) en deux autres, l'un (T, — T) qui tombe dans un plan perpendiculaire à la direction de la résultante, et l'autre (V, — V) dans un plan qui passe par cette direction AR. Si, dans ce plan, où se trouvent à la fois le couple (V, — V) et la

force R, on transporte cette force parallèlement à elle-même de A en O d'un tel côté, et à une telle distance AO, que le couple (R, — R), né de cette translation, soit égal et contraire au couple (V, — V) et le détruise, il ne restera plus que la seule force R, appliquée au nouveau point O, avec le seule couple (T, — T) qui est dans un plan perpendiculaire à la direction de cette force. Ainsi, *tant de forces qu'on voudra sont toujours réductibles à une seule force et à un seul couple dont le plan est perpendiculaire à la direction de la force* : de sorte qu'il y a toujours dans l'espace une certaine droite déterminée OR qui peut servir à représenter tout à la fois la direction de la résultante et l'axe du couple résultant.

» Cette réduction est unique : je veux dire qu'il n'y a dans l'espace aucun autre lieu où l'on puisse trouver le couple résultant perpendiculaire à la résultante. Car maintenant, de quelque côté qu'on veuille transporter la force R hors de sa position actuelle OR, elle produira un couple (R, — R) perpendiculaire au couple (T, — T), et ces deux couples, étant composés en un seul, donneront le nouveau couple résultant nécessairement incliné au couple (T, — T); et même toujours plus grand, puisque les deux composants sont rectangulaires entre eux. D'où l'on voit, non-seulement que le couple (T, — T) est le seul qui puisse être perpendiculaire à la direction de la résultante, mais qu'il est encore le plus petit de tous les couples résultants qu'on peut trouver par rapport à tous les points de l'espace. On voit en même temps que, pour des points pris autour de OR, à égales distances de cette droite, les couples résultants ont des valeurs égales, et sont dans des plans différents, mais

également inclinés à cet axe OR, qu'on peut ainsi nommer l'*axe central* des couples du système. En s'éloignant de cet axe, on trouve des couples toujours plus grands et qui croissent sans bornes ; mais ils ont tous cette commune propriété, que chacun d'eux, *estimé* sur le plan perpendiculaire à la direction constante de la force R, donne le même couple (T, —T) ; d'où l'on voit que la valeur de ce couple *minimum* s'obtient tout de suite en prenant un couple résultant quelconque (S, — S) et le multipliant par le cosinus de son inclinaison au plan dont il s'agit. »

Ces spéculations sur les couples ne sont pas rationnelles ; car, sous un rapport, elles ne peuvent être prises dans un sens absolu qu'à la condition de supposer que le corps auquel sont appliquées les forces parallèles et contraires est absolument rigide, inextensible ; tandis que, sous un autre point de vue, si le corps était absolument tel, il serait dans l'impossibilité de tourner, d'avoir le mouvement de rotation qu'on le suppose susceptible de prendre autour d'un point situé au milieu de son bras de levier.

Je l'ai déjà dit, et cela est évident, l'inflexibilité, l'inextensibilité d'une droite, d'une barre, d'un corps de forme quelconque, ne pourraient être absolues que dans le cas où cette droite, cette barre, ce corps serait d'une seule pièce, sans aucune division réelle de parties. Or, je l'ai dit aussi, en ce cas, le corps ne pourrait se mouvoir que parallèlement à lui-même et à la fois dans sa totalité ; il ne pourrait tourner sur lui-même, sur un point quelconque, car cette rotation impliquerait que la vitesse du mouvement exécuté diminuerait *continûment* de plus en

plus de l'extrémité du rayon au centre de rotation, ce qui est inadmissible.

De plus, on le voit, pour ses démonstrations, Poinsot s'appuie sur la théorie de la composition des forces parallèles ; il y considère que la résultante de deux forces parallèles et de même sens appliquées aux extrémités d'une droite s'applique à tel point déterminé, tandis que, dans l'hypothèse où il est, et qui est nécessaire, celle d'une droite rigoureusement inflexible et inextensible, la résultante devrait pouvoir s'appliquer à un point quelconque de cette droite.

En réalité, un couple, tel que la théorie le suppose constitué, ne pouvant, en aucun cas, faire tourner le système, celui-ci doit être en parfait équilibre par l'action des deux forces égales et contraires ; car en réalité ces forces ne peuvent, dans l'hypothèse, agir autrement que si elles étaient appliquées en sens opposé, à un même point quelconque du corps, du bras de levier du couple.

Certainement, un couple, dans ces conditions, n'a pas de résultante; certainement il peut être transporté partout où l'on voudra, sans aucun changement, et être changé en un autre, puisque un couple quelconque est sans effet par l'équilibre absolu de ses forces ; mais les théorèmes qui regardent un couple comme tendant à faire tourner sur le milieu de sa ligne d'application ou de son bras de levier sont, à ce point de vue, sans valeur théorique; car cette rotation, cette tendance à la rotation est chimérique dans l'hypothèse d'inflexibilité et d'inextensibilité absolue des droites ou des corps considérés ; et, d'un autre côté, si l'on ne suppose pas cette condition, si l'on considère les corps comme formés de molécules distantes

les unes des autres et pouvant prendre des mouvements différents, d'inégale vitesse, l'on n'est pas en droit de raisonner comme on le fait pour démontrer ces théorèmes, car, du moins théoriquement, à part l'expérience, on ne peut assurer que les forces moléculaires se comportent de manière à les réaliser.

Il est même facile de voir que cette réalisation des mêmes théorèmes est inadmissible. A cet égard, il y a lieu de faire des remarques analogues à celle que j'ai présentées pour montrer l'inanité des théorèmes relatifs à la composition des forces parallèles.

On n'est même pas en droit d'assurer, en dehors de l'expérience, que l'on peut appliquer les théorèmes en question sans commettre des erreurs sensibles; que, par exemple, on ne saurait s'éloigner sensiblement de la vérité en appliquant pratiquement ce principe, que l'intensité d'un couple, c'est-a-dire de deux forces égales parallèles et opposées, appliquées à deux points d'un corps, est mesurée par le moment du couple, c'est-à-dire par le produit de son bras de levier multiplié par l'une de ses forces.

Est-il conforme à l'expérience, à l'observation, qu'*un couple quelconque peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, sans que son effet sur le corps auquel il est appliqué en soit changé, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement attaché au premier?*

Si le théorème était vrai, il faudrait admettre que toujours le corps auquel le couple donné serait appliqué tendrait à tourner, avant et après la translation de ce couple dans son plan, exactement sur le même axe et précisément avec la même vitesse, dans les deux posi-

tions. Or je ne crains point de dire que l'expérience ne confirme pas cette donnée, et que même elle vient la contredire. Que, par l'ensemble des causes, la rotation ne se fasse pas, ne tende pas à se faire absolument et invariablement sur le milieu de chaque bras de levier du couple; que la situation de son axe dépende aussi de la forme du corps et de la situation relative du couple, c'est possible et même plausible; mais elle tend bien toujours à se produire entre les deux points extrêmes de chaque bras de levier et à peu près, sinon précisément, sur son milieu.

Je ne saurais admettre que si l'on a une force P appliquée au point B d'un corps ou système invariable, et qu'on applique au point A, arbitrairement pris dans ce corps ou système invariable, deux forces contraires P′, —P′, égales et parallèles à la force P, on aura ainsi, outre la force P′ appliquée à A, un couple (P, — P′), une cause capable de faire tourner le corps sur lui-même, sur un certain axe; car je maintiens que, dans l'hypothèse où l'on se trouve, celle de l'invariabilité du système, jamais un couple ne saurait imprimer un mouvement rotatoire. Je soutiens que les deux forces du couple devront être en équilibre. D'ailleurs, l'expérience ne vient point à l'appui de la doctrine, car elle ne nous présente pas de système absolument invariable.

D'après la théorie que je critique, l'effet serait toujours le même, à quelque point que les deux forces contraires P′, — P′ égales et parallèles à P, seraient appliquées, c'est-à-dire quelles que pussent être la grandeur du couple ainsi produit, son sens, la direction de son plan. Or cela peut-il se réaliser? Si les forces contraires P′, —P′ sont supposées appliquées à un point matériel absolumen

continu, invariable dans son étendue et sa forme, tel que l'on conçoit une molécule élémentaire, il est visible que, ces deux forces se faisant parfaitement équilibre, le point matériel ne sera aucunement mu, modifié par elle, leur action ne pourra avoir aucune influence sur le système soumis à la force P appliquée à un autre point. Sous ce rapport, même dans l'hypothèse où le système ne serait pas de forme invariable, la théorie serait donc dans le vrai. Mais elle admet ausssi que le couple peut être déplacé, être transporté où l'on veut dans son plan ou dans un plan parallèle, sans que son effet sur le corps auquel il est appliqué en soit changé, pourvu que le nouveau bras de levier soit invariablement lié au premier, de sorte que le système entier serait absolument invariable. En ce cas, je le répète, il ne pourrait y être appliqué un couple, des forces tendant vraiment à imprimer au système un mouvement de rotation. Conséquemment, si, après qu'on aura appliqué à un point d'un corps ou système les forces contraires P',—P' parallèlement à P appliquée à un autre point de ce corps ou système, il arrive que les forces P, — P', égales, parallèles et contraires, transportées dans leur plan ou dans un plan parallèle, tendent vraiment, comme on l'admet, à faire tourner le système qui a reçu ces applications, il devra être modifié dans son état par suite de la translation des forces P, — P'. A cet égard, la théorie des couples ne sera donc pas réalisable. Il est plausible, en effet, que le système éprouvera alors des modifications qui varieront en même temps que les points et les plans où les applications et translations dont il s'agit pourront être faites, c'est-à-dire à l'infini. Par la variation des lieux, les effets produits, loin d'être égaux, pourront même être contraires.

Supposons que le système soit de forme régulière, soit composé de points matériels disposés symétriquement de manière à constituer une sphère. Considérons, dans cette sphère, un grand cercle CQLR (fig. 34), soit la force P appliquée au point B que je suppose au centre ou à une distance quelconque du centre et dirigée suivant le diamètre QR. Si à un point A du système, placé sur une ligne BA perpendiculaire au diamètre QR, on applique deux forces contraires P′, — P′ égales et parallèles à P, on aura, d'après le théorème admis, la force P′ au point A, et, de plus, le couple (P, — P′) qui tendra à faire tourner le système dans le sens indiqué par la flèche figurée de ce côté. Mais si les mêmes forces P′, — P′ au lieu d'être appliquées en A, le sont en A′, à une distance BA′ égale à BA, prise sur le prolongement de BA en sens opposé, l'effet produit dans ce dernier cas devrait être exactement contraire à celui produit dans le premier; car les deux couples, égaux d'ailleurs, résultant des deux dispositions, sont de sens contraires, les forces P′ sont égales et les autres circonstances sont relativement semblables. Ainsi le théorème s'évanouit.

Dira-t-on que, dans l'espèce, la rotation serait impossible, que la sphère, par l'action seule de la force P, ne pourrait avoir qu'un mouvement de translation et qu'elle n'aurait que ce même mouvement par l'action du couple (P, — P′) et de la force P′, à quelque point que les deux forces contraires P′, — P′ seraient appliquées? Je répondrais que cela ne résulte pas de la théorie des couples. D'ailleurs elle est fausse, sans base, et, au point de vue de l'expérience, je ne vois pas que, dans le cas dont il s'agit, la sphère, par l'effet du couple et de la force

transportés, ne puisse tourner sur un axe excentrique. Si la rotation peut avoir lieu dans les cas où le couple résulte de la translation centrale d'une force appliquée excentriquement, pourquoi serait-elle absolument impossible dans l'hypothèse où le couple naîtrait de la translation excentrique d'une force centrale?

Quelle que soit la forme du système, qu'elle soit régulière ou irrégulière, les divers points A auxquels la force P serait supposée transportée symétriquement ou non, pourraient être tels, que les translations effectuées aux uns donneraient des couples de sens opposés aux sens des couples qui résulteraient des translations effectuées aux autres points.

Les couples obtenus par la translation de la force P, et transportés eux-mêmes dans leur plan ou dans un plan parallèle, pourraient aussi être différents dans leur grandeur, le lieu et la direction de leur axe de rotation, et il est plausible que, dans la réalité, les effets seraient différents dans ces divers cas.

On a voulu se servir de ce théorème pour expliquer la rotation des astres, des planètes. On a dit : « Pour concevoir qu'une planète, dans le principe, ait dû prendre un mouvement rotatoire, il suffit d'admettre qu'elle ait été primitivement soumise à une force appliquée à un point de ce corps situé hors de son centre, et non dirigée suivant un de ses diamètres; car, en appliquant à un autre point du même corps deux forces contraires l'une à l'autre, égales et parallèles à la première, il n'y a rien de changé à l'état du système; et cependant il y a, outre une simple force agissant au nouveau point, un couple transportable, aussi sans changement, dans son plan ou parallèlement à son plan. — Or, cette explica-

tion est sans fondement, car elle s'appuie sur une fausse hypothèse. Même en supposant la force excentrique donnée de position, de direction et d'intensité, elle ne fournirait point vraiment, comme on l'entend, le moyen de déterminer la direction de l'axe de rotation, ni même l'intensité de la rotation. Dans l'hypothèse où les deux forces contraires sont appliquées à une distance du centre de l'astre égale à celle existante entre ce centre et le point d'application de la force donnée, et où les deux points d'application se trouvent sur un diamètre, on aura un couple dont le centre coïncidera avec le centre de l'astre ; mais rien n'oblige à supposer que les deux forces contraires sont appliquées plutôt à un point qu'à un autre. On pourrait même varier leur point d'application de manière à déterminer des couples exactement égaux, placés dans des positions symétriquement opposées par rapport à la sphère, et dont l'un serait de sens exactement contraire au sens de l'autre couple, comme je l'ai expliqué plus haut. L'on aurait ainsi arbitrairement tel effet total ou tel effet exactement contraire, même en supposant que le système soit invariable, si l'on supposait aussi qu'il peut néanmoins tourner sur lui-même ; ce qui renverse le théorème.

Si, au lieu d'une seule force P, il y en a plusieurs P, P', P'',... appliquées à divers points du système, le plan, la grandeur, l'axe et le sens du couple résultant (S, — S), devraient varier suivant la position du point A, auquel toutes les forces seraient supposées transportées. Si le corps ou système était régulier ou symétrique, les forces données pourraient être telles et tellement disposées, qu'il y aurait deux points A symétriquement opposés que l'on pourrait prendre et où l'on obtiendrait,

avec la même force résultante, un même couple (S, — S), si ce n'est que celui obtenu à l'un des points serait de sens précisément contraire au sens du couple obtenu à l'autre point. Evidemment, l'effet total produit dans un de ces cas, devrait être exactement contraire à celui qui serait produit dans l'autre cas ; résultat qui proteste contre le théorème.

Vainement invoquerait-on le secours du couple résultant (T, —T) perpendiculaire à la résultante R, lequel, quel que fût le point de translation, serait de même grandeur.

Premièrement. Pourquoi Poinsot, après avoir cru démontrer que *tant de forces qu'on voudra sont toujours réductibles à une seule force et à un seul couple, dont le plan est perpendiculaire à la direction de la force*, concluait-il *qu'il y a toujours dans l'espace une certaine droite déterminée* OR *qui peut servir à représenter tout à la fois la direction de la résultante et l'axe du couple résultant*, et ajoutait-il : *Cette réduction est unique ; je veux dire qu'il n'y a dans l'espace aucun autre lieu où l'on puisse trouver le couple résultant perpendiculaire à la résultante ?* — D'après la théorie même que je critique, quel que soit le point A où les forces seront transportées parallèlement à elles-mêmes, on aura seulement à ce point la résultante R et un couple (S, — S) généralement incliné à la direction de R ; toujours alors, en décomposant ce couple (S, — S) en deux autres, l'un (V, — V) tombant dans un plan passant par la direction AR de la résultante R, et l'autre (T, — T) dans un plan perpendiculaire à cette même direction AR, puis en transportant la force R à un point O tel que le couple résultant de cette translation fasse équilibre au couple (V, — V), on

n'aura plus, outre la force transportée au nouveau point, que le couple perpendiculaire (T, — T), dont une des forces sera au point A. Puisqu'il en sera ainsi pour tous les points A où la résultante des forces se trouverait d'abord appliquée et où il y aurait d'abord un seul couple résultant incliné à cette résultante, le couple perpendiculaire (T, — T) pourrait donc varier de lieu à l'infini; rien ne déterminerait le point sur lequel serait appliqué le milieu de son bras de levier. Rien non plus ne déterminerait le lieu, le point O où serait finalement appliquée la résultante R. Il n'est donc pas exact, à ces points de vue, de dire que la réduction est unique, en ce sens qu'il n'y ait dans l'espace qu'un lieu où l'on puisse trouver le couple résultant perpendiculaire à la force résultante, qu'il y a toujours dans l'espace une *certaine droite déterminée* OR qui peut servir à représenter tout à la fois la direction de la résultante et l'axe du couple résultant. Poinsot, à ce sujet, dit que « de quelque côté qu'on veuille transporter la force R hors de sa position actuelle OR, elle produira un couple (R, — R) perpendiculaire au couple (T, — T), et que ces deux couples, étant composés en un seul, donneront le nouveau couple résultant nécessairement incliné au couple (T, — T), et même toujours plus grand, puisque les deux composants sont rectangulaires entre eux. » Il s'ensuit qu'après avoir trouvé, par le procédé indiqué, un premier couple (T, — T) perpendiculaire à la force résultante R, on ne pourra pas, en continuant à transporter cette même force résultante R en d'autres points O, déterminer d'autres couples perpendiculaires que le couple obtenu (T, — T); c'est sous ce rapport, en ce sens, que Poinsot assure que la réduction en question est unique,

qu'il n'y a dans l'espace qu'un lieu où l'on puisse trouver le couple résultant perpendiculaire. Au reste, en réalité, ce couple pourrait être obtenu en des lieux variables à l'infini, ainsi que les points O de la résultante R, et si, à certains points de vue où l'auteur s'est placé, il est logique de ne pas tenir compte de ces variations, il n'en est pas de même sous d'autres rapports, notamment dans l'hypothèse qui est la seule admissible, celle où les corps *pouvant tourner sur eux-mêmes* par l'action de forces quelconques, ne sont pas absolument inflexibles, inextensibles, sont composés de parties individuellement mobiles, comme je l'ai déjà expliqué.

Secondement. Il n'est pas plausible, dans cette même hypothèse, que si, en premier lieu, tout est réduit à la seule force R et au seul couple (S, — S) par rapport à un point commun A, on puisse sans changer l'effet, transporter la force R parallèlement à elle-même en un certain point O, et, par ce moyen, remplacer le couple (S,—S) incliné à la direction de R, par un couple (T, — T) perpendiculaire à cette direction. Dans ce dernier cas sans doute, la rotation, si elle était possible, aurait lieu sur un axe différent de l'axe sur lequel elle s'opèrerait dans le premier, et sans doute aussi la vitesse rotatoire varierait de l'un à l'autre cas. D'ailleurs, d'après la théorie, rien ne déterminant le lieu de l'application du couple (T, — T), l'axe sur lequel le système devrait tourner resterait indéterminé. De plus, le sens même du couple perpendiculaire pourrait varier par la variation du point A, et de telle sorte que, dans certains cas, des effets exactement contraires dussent se produire, selon le choix du point A, comme on l'a vu plus haut, alors même qu'on supposerait que le système est invariable, en

supposant aussi qu'il peut cependant tourner sur lui-même. Au reste, il n'y a pas toujours lieu au couple (T, —T) perpendiculaire à la résultante R ; car il peut arriver que le couple résultant (S, —S) et la résultante R soient dans le même plan, et cela est même nécessaire, s'il n'y a qu'une seule force donnée P, ou si toutes les forces données sont parallèles ; alors cependant les couples résultants (S, —S) pourraient bien varier dans leur axe de rotation, leur grandeur et leur sens, suivant le point A où aurait lieu la translation. De toutes manières donc la doctrine aboutit à l'indétermination, à une indétermination inacceptable.

Observons que, dans le cas où il y a plusieurs forces données et réduites, comme on l'a dit, à une force et à un couple, il n'est pas besoin de considérer, comme je l'ai fait plus haut, que, d'après la théorie, le couple peut être transporté où l'on veut dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, sans changer son effet sur le système supposé invariable, pour reconnaître que le système, n'étant pas réellement invariable, doit sans doute changer d'état par la substitution de ce couple résultant et de la force résultante, et être diversement modifié suivant les lieux occupés par cette force et par ce couple.

Toutes autres démonstrations des théorèmes sur les couples, qu'on pourrait proposer, pècheraient aux mêmes points de vue généraux que celles de Poinsot. Telle est la théorie que présente, à ce sujet, M. Moigno, d'après Cauchy, dans les leçons déjà citées. Je l'exposerai et critiquerai dans une note placée à la fin de ce livre.

La vérité est que si des forces d'intensité et de direction quelconques sont appliquées à des points quelconques

d'un corps ou système supposé de forme absolument invariable, ou bien ces forces auront une seule résultante qui pourra s'appliquer à un point quelconque du système, ou bien elles se feront parfaitement équilibre.

En effet, dans l'hypothèse, toutes ces forces pourront être transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point quelconque du système, sans qu'il s'opère aucun changement dans l'état du corps. Or, de deux choses l'une, ou bien ces forces, en se composant entre elles, seront réduites à une seule force résultante, ou elles se réduiront à deux forces égales et contraires qui se feront équilibre.

Si une seule force P est appliquée au point B d'un système invariable, et que l'on applique à un autre point A de ce système deux autres forces contraires P′, — P′, égales et parallèles à P, il n'y aura rien de changé dans l'effet produit, puisque P′, — P′ se feront équilibre. Si ensuite on transporte parallèlement à elles-mêmes dans le système les forces P, — P′, ces deux forces ainsi transportées se feront équilibre, et il restera seulement en A la force P′; en somme donc, il n'y aura rien de changé, car P′, au point A, agira exactement comme P agirait en B. C'est comme si tout d'abord on eût transporté P de B en A parallèlement à elle-même, et, je le répète, cette translation peut se faire sans changer l'effet de la force, sans modifier l'état du système supposé absolument invariable.

On voit que, d'après les principes que j'ai émis et qui sont les vrais, il n'y a aucune difficulté dans la composition des forces appliquées à un système supposé invariable.

Les autres théories, au contraire, pèchent essentiellement; elles blessent évidemment la raison.

CHAPITRE III.

DES PRINCIPES DU LEVIER.

On définit généralement le levier, en disant que c'est une barre rigide pouvant tourner dans tous les sens autour d'un point fixe qu'on nomme *point d'appui*. A deux points différents de cette barre, sont appliquées deux forces tendant à faire tourner la barre en sens opposé. L'une de ces forces s'appelle la *puissance*, l'autre se nomme la *résistance*.

« Soient, dit Poinsot, deux forces quelconques P et Q (fig. 35) appliquées immédiatement, ou suivant des cordons, aux deux points A et B d'un levier AFB de figure quelconque ; soit F le point fixe autour duquel le levier a la liberté de tourner et qu'on nomme ordinairement le point d'appui : on demande les conditions de l'équilibre, en faisant d'abord abstraction de la pesanteur du levier.

» Du point F j'abaisse sur les directions des deux forces P et Q deux perpendiculaires FH, FI, qui rencontrent ces directions, prolongées, s'il est nécessaire, en H et I ; et regardant ces deux points comme invariablement liés aux points A et B, je suppose que les deux forces P et Q y agissent immédiatement.

» Cela posé, j'applique au point F deux forces contraires, P′ et — P, égales et parallèles à P, et, au même point F, deux autres forces contraires Q′ et — Q, égales et prallèles à Q. Il est clair que le levier reste toujours dans le même état. Mais on peut considérer actuellement, au lieu des deux forces primitives P et Q, 1° deux forces P′ et Q′ respectivement égales et parallèles à ces forces, et de même sens, mais appliquées en F; 2° deux couples (P, — P), (Q, — Q), dont les bras de levier sont FH et FI.

» Or la résultante des deux forces P′ et Q′ est toujours détruite par la résistance du point d'appui, si l'on suppose le levier invariablement lié à ce point, de manière qu'il ne puisse prendre qu'un mouvement de rotation autour de lui. Mais le couple résultant des deux couples (P, — P) et (Q, — Q) ne peut jamais être détruit par ce point fixe, et, par conséquent, il faut, pour l'équilibre, que ce couple résultant soit nul de lui-même, ou que les deux couples composants (P, — P) et (Q, — Q) soient équivalents et contraires. Ces deux couples doivent donc se trouver dans des plans parallèles, et, par conséquent, dans le même plan, puisque leurs plans se rencontrent déjà au point F. En second lieu, leurs moments $P \times FH$, $Q \times FI$ doivent être égaux, et ils doivent tendre à faire tourner en sens contraires.

» Donc, *pour l'équilibre du levier, il est nécessaire et il suffit*, 1° *que les deux forces* P *et* Q *qui le sollicitent soient dans un même plan avec l'appui;* 2° *que leurs moments, par rapport à ce point, soient égaux;* 3° *qu'elles tendent à faire tourner en sens contraires.*

» A l'égalité des moments $P \times FH = Q \times FI$, on peut substituer la proportion $P : Q :: FI : FH$, qui

exprime que les forces P et Q doivent être en raison réciproque de leurs distances au point d'appui. »

On a voulu démontrer ces principes d'une manière un peu différente ; on a dit : « Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que les deux forces Q, P (fig. 36) aient une résultante passant par le point d'appui, dont la résistance la détruira ; autrement cette résultante produirait un mouvement. Or on démontre en statique que, pour que deux forces aient une résultante unique, il faut qu'elles soient dans un même plan. Supposons que les directions des deux forces se rencontreut en un point *c*. Pour que leur résultante passe par le point O (point d'appui), il faut, 1° qu'elle soit dirigée dans l'angle ABC, ce qui exige que les forces tendent à faire tourner le levier en sens contraires ; 2° que le point O soit dans le plan ABC ; 3° que les distances du point O aux deux composantes soient en raison inverse des intensités de ces forces, de sorte qu'on ait P : Q :: O*a* : O*b* (corollaire de la règle du parallélogramme des forces).

» Si les deux forces étaient parallèles, les deux bras de levier seraient sur le prolongement l'un de l'autre ; et si ces forces sont en raison inverse des bras de levier, la résultante passera par le point O, d'après le principe de la composition des forces parallèles. »

Quels que soient les procédés employés pour démontrer ces principes, on ne saurait y parvenir, car il faut toujours supposer que le levier et ses bras sont absolument inflexibles et inextensibles, ce qui n'est pas admissible, si ces corps ou droites ne sont pas considérés comme étant d'une seule pièce, ou se comportant exactement comme s'ils étaient tels, de même que pour les théorèmes relatifs à la composition des forces parallèles.

Mais, dans cette hypothèse de continuité absolue, je le répète, et cela est de toute évidence rationnelle, ni le levier ni ses bras ne sauraient tourner; ils ne sauraient se mouvoir autrement que parallèlement à eux-mêmes ou dans leur propre direction. Sous d'autres rapports, la théorie du levier soulève plusieurs difficultés.

Soit P (fig. 37) une force, un poids appliqué à l'extrémité B du bras de levier AB, et P' un autre poids appliqué à l'extrémité A du bras de levier AC. Pour qu'il y ait équilibre, d'après le théorème admis, il faut que les bras de levier soient en raison inverse des poids appliqués à leur extrémité respective, il faut avoir l'égalité

$$AC \times P' = BC \times P, \text{ d'où } Ac : Bc :: P : P'.$$

D'où il suit que le poids agit proportionnellement d'autant moins sur le bras de levier, qu'il est appliqué plus près du point d'appui G. Il en résulte que si le poids P, au lieu d'être appliqué en B, l'était en B', à une distance du point d'appui que je suppose être la moitié de BC, l'action de ce poids à ce point serait égale à la moitié de celle de P appliqué au point B; de sorte que, du moins en faisant abstraction de la masse des bras de levier, si le bras de levier BC n'était mu que par le poids P appliqué au point B' et que, par suite, il tournât avec une certaine vitesse angulaire ω, l'angle décrit par ce bras de levier dans l'unité de temps ne serait que la moitié de l'angle qui serait décrit par le même bras, si le point d'application de P était en B au lieu d'être en B'. Or, menons du point C une ligne droite CK faisant un angle quelconque avec BC, et, avec des rayons égaux à BC, B'C, décrivons les arcs BK, B'K'. Si P était appliqué à

une distance BC double de B'C, et si son action à cette distance se bornait à faire décrire, pendant l'unité de temps l'arc BK, au lieu de l'arc B'K' qu'il lui ferait décrire dans le même temps, étant appliqué en B', la vitesse angulaire de ce bras de levier serait la même que celle qu'il aurait dans le cas où le poids serait appliqué en B'. Il faut donc plus que cela pour satisfaire au théorème : il faut, dans l'exemple, que le poids appliqué en B fasse parcourir au bras de levier tournant sur le point d'appui un arc double de celui qu'il lui ferait parcourir s'il ne devait que lui faire décrire un angle égal à l'angle B'CK'. La vitesse effective, absolue, imprimée au point B par P appliqué à ce point B, devrait donc être en ce cas quadruple de la vitesse qui serait imprimée au même point (1), si P était appliqué en B'; en sorte que, si le levier décrivait la courbe B'K' dans ce dernier cas, il décrirait la courbe BH dans le premier.

A une distance triple du point d'appui, la vitesse effective imprimée serait neuf fois plus grande, et ainsi de suite, de sorte que les vitesses effectives imprimées à divers points par un même poids, seraient entre elles comme les carrés des distances au point d'appui.

Or, ces conditions peuvent-elles se réaliser?

Représentons un bras de levier par les molécules *a, b, c, d, e, f, g, h*..... *n* (fig. 38), *a* étant une première molécule, que je suppose placée seule sur le point d'appui, et *n* étant la dernière de la rangée. Supposons d'abord qu'un poids P soit appliqué à la molécule *n*. D'après les principes que je viens de poser, l'effet indirect que l'ac-

(1) En réalité, il n'y a pas de rapport de quantité entre des vitesses sur des courbes essentiellement différentes, telles que B'K', BK; mais on admet ces rapports.

tion directe de P sur la molécule *n* produirait sur les molécules suivantes de la rangée, irait en diminuant de plus en plus jusqu'à la molécule *a* portant sur le point d'appui, de sorte qu'une molécule voisine de ce point, telle que *e*, par exemple, aurait une vitesse rotatoire absolue bien moindre que celle de la molécule *n*. Il est donc visible que la vitesse que P imprimerait à la molécule suivante *d* plus rapprochée de *a*, *si cette force y était directement appliquée,* devrait être, à ce point de vue, beaucoup plus grande que celle qui pourrait être communiquée par la vitesse imprimée à *e* par suite de l'action directe de P sur la dernière molécule *n*. Il faudrait donc conclure, bien contrairement au théorème admis, que plus le point d'application de la force est rapproché du point d'appui, c'est-à-dire plus est court le bras de levier, plus aussi l'effet est grand, plus est grande la vitesse angulaire imprimée au bras de levier.

Sous ce rapport, le théorème en question est donc inadmissible, et pourtant l'on ne saurait, pour échapper à cet impossibilité, supposer spéculativement que le bras de levier n'est pas un composé de molécules, qu'il est un tout continu, sans solution de continuité; car, dans cette hypothèse, il faudrait refuser au bras de levier la possibilité de tourner sur lui-même.

Ce n'est pas tout, et l'on va voir d'autres difficultés.

Soit (fig. 39) AB un levier droit, C le point d'appui que, pour simplifier, je suppose au milieu de AB. D'après les principes du levier, s'il n'est pas en équilibre et que la force dominante soit appliquée au bras CB, par exemple, ce bras s'abaissera et en même temps l'autre bras CA s'élèvera d'autant, le levier restant droit et formant ainsi deux angles égaux par son inter-

section avec sa première direction AB ; mais comment expliquer ceci? Supposons que la force prédominante, au lieu d'être appliquée à l'extrémité B du bras de levier, le soit au point K entre le point B et le point d'appui C. Représentons, par une suite de molécules, le levier AB (fig. 40), et supposons que le point d'application soit une de ces molécules. La molécule K s'abaissant par l'action du poids P qui lui est directement appliqué, je conçois que cette molécule entraînera plus ou moins dans son mouvement les molécules qui se trouvent entre K et celles qui reposent sur le point d'appui ; mais ce que je ne comprends pas, c'est que les molécules situées de l'autre côté, entre K et B, s'abaissent au point de rester en ligne droite avec l'autre partie CK de ce bras de levier. La molécule K, en s'abaissant, fera baisser aussi la molécule suivante du côté de B, non point plus qu'elle-même, comme il faudrait le supposer, mais au contraire moins qu'elle-même ne s'abaissera. Cette seconde molécule entraînera la molécule venant ensuite, mais moins qu'elle-même n'aura été entraînée par la précédente, et ainsi de suite de proche en proche, de sorte que la partie KB ne devra point se trouver sur la même ligne que CL, mais sera, jusqu'à un certain point, relevée à partir de K jusqu'en B.

Et comment expliquer l'élévation en ligne droite du bras de levier AC? On dira que la partie qui porte sur le point d'appui C le presse fortement quand s'abaisse l'autre bras, et que, par l'effet de l'élasticité, elle doit se relever, se mouvoir en sens inverse de celui suivant lequel le poids P fait abaisser l'autre bras. Soit encore : j'accorde même que la partie ainsi poussée sur C en-

traînera, en se relevant, les molécules comprises de C en A, et cela de proche en proche, mais avec une intensité de moins en moins grande, de même que je viens de le dire pour la portion KB de l'autre bras de levier, en sens inverse. Pour s'expliquer que le bras de levier CA pût s'élever en restant droit, comme on l'admet, il faudrait supposer que les molécules, en obéissant au mouvement imprimé, marchent beaucoup plus vite que celles qui les entraînent, ce qui n'est point admissible. Chaque molécule entraînée successivement ne doit pas marcher aussi vite que la molécule entraînante, loin de pouvoir la devancer.

Sans accepter les principes du levier dans leur rigueur absolue, il faut reconnaître que, d'après l'expérience, plus le point d'application de la force est éloigné du point d'appui, plus aussi est grande la vitesse angulaire imprimée au bras de levier. Il faut aussi reconnaître que, quand la force est appliquée à un point situé entre son extrémité et le point d'appui, le bras de levier ne paraît pas s'infléchir au point d'application, et que l'autre bras, bien que ne recevant aucune impulsion directe, se relève sans éprouver une inflexion sensible. Comment donc se rendre compte de ces phénomènes? Comment résoudre ces graves difficultés que ma critique vient de soulever?

Voici, à ce sujet, les explications que je propose.

Lorsqu'une force est appliquée normalement à l'extrémité du bras de levier, elle a d'abord un premier effet, qui est de faire marcher à la fois, mais inégalement, toutes les molécules de ce bras, et de manière qu'elles décrivent chacune une très-petite droite, qui est d'autant plus minime que la molécule qui l'exécute

est plus rapprochée du point d'appui. Ensuite, par la fixité de ce point, jointe à la cohésion existante entre toutes les molécules du bras de levier, toutes sont ramenées vers le support de manière à décrire une autre petite droite faisant un angle avec la première décrite par elles ; à un troisième instant, une autre droite oblique à la dernière est décrite, et ainsi de suite, de sorte que le bras de levier paraît tourner autour du point fixe.

Supposons qu'au lieu d'une force constante P, appliquée à l'extrémité du bras de levier, cette extrémité reçoive une seule impulsion dirigée normalement à ce bras. Il se produira quelque chose d'analogue à ce que je viens de dire, mais les longueurs des petites droites successivement décrites par chaque molécule iront en diminuant de plus en plus avec le temps. Or, à cause du point fixe, les molécules qui en seront plus rapprochées seront bien plus ralenties que celles qui en seront les plus éloignées, et celles-ci, conservant plus longtemps leur vitesse initiale, ou éprouvant dans cette première vitesse un ralentissement bien moindre que celui des molécules très-rapprochées du point fixe, réagiront sur celles-ci de manière à hâter leur marche.

Ces petits phénomènes préalables se produisent si rapidement, se passent à une succession d'instants tellement minimes que nous ne pouvons les distinguer et que nous ne saisissons que le résultat total qui nous semble immédiat.

Il suit de là que plus le bras de levier sera long, plus les vitesses des molécules les plus éloignées du point fixe auront d'influence pour accroître le mouvement des molécules plus proches de ce point, et l'on peut penser

que cette influence est assez grande pour expliquer les inégalités qui se produisent dans la grandeur de la vitesse angulaire du bras de levier, suivant que son bras, à l'extrémité duquel l'impulsion est donnée, est plus ou moins long ; on peut le supposer même en tenant compte de ce qu'une première impulsion donnée à l'extrémité d'un bras de levier court, lui imprime d'abord une vitesse angulaire un peu plus grande que celle qu'il aurait s'il était plus long, et qu'il reçût la même impulsion à son extrémité.

Maintenant si, au lieu d'une impulsion une fois donnée, le bras de levier est soumis à une force constante P, appliquée normalement à son extrémité, il est évident que mon explication sera encore applicable : seulement, au lieu de décroître, la vitesse du bras de levier ira en croissant de plus en plus.

La même explication, au fond, peut rendre compte de ce que, si une impulsion ou une force constante P est appliquée normalement à un point placé entre l'extrémité et le point fixe, le bras entier ne paraît pas fléchir au point d'application, et que toutes ses molécules, dans l'hypothèse, se rangent sensiblement dans une position rectiligne oblique à la première direction du bras de levier. Alors, en effet, les molécules qui s'éloignent du point fixe et viennent à la suite du point d'application font d'abord un petit angle avec la partie du bras de levier qui précède ce même point d'application, mais généralement et relativement bien plus éloignées du point d'appui que les molécules composant cette dernière partie, elles perdent généralement et relativement aussi bien moins de leur vitesse que celles-ci, et, par suite, finalement, le bras de levier est redressé par

l'accroissement que leur réaction produit sur les molécules plus rapprochées du point d'appui.

Enfin, au même point de vue, on s'expliquera aussi qu'un bras de levier se relève, et reste sensiblement droit quand l'autre, soumis à une impulsion ou à une force P appliquée à un de ses points, s'abaisse; car il se produit alors dans le premier, en sens inverse, un effet analogue à celui qui se produit dans le second.

Parmi les nombreuses applications du levier, figure la balance, qui, comme on sait, est un levier droit du premier genre. Je n'ai donc pas besoin de faire remarquer que mes critiques et explications précédentes au sujet du levier s'appliquent à la balance.

Précédemment j'ai dit que si une force est appliquée normalement à une barre, libre d'ailleurs, à son milieu, à un point placé entre ses deux extrémités, cette force tend à faire fléchir la barre au point d'application, la fait plus ou moins s'infléchir à ce point. Or cela doit bien avoir lieu, du moins au premier moment, mais, d'après les considérations que j'ai présentées relativement au levier, on peut penser qu'il tend ensuite à se produire un redressement de la barre. En effet, soit (fig. 40 *bis*) une série de molécules *a, b, c, d, e, f, g*, placées à égales distances les unes des autres sur une ligne droite, et soit appliquée une force P ou donnée une impulsion à la molécule *d*, milieu de la série, normalement à sa direction. Dans un premier moment extrêmement court, *d* vient en *d'*, *c* en *c'*, et ainsi de suite, pour toutes les molécules, de manière que la série s'infléchisse et fasse un angle très-obtus en *d'*. Après ce premier mouvement, *d* en *d'*, attirée à la fois et obliquement par *e* et *c* venus en *é* et *c'*, qui lui sont obliquement contiguës,

tendra à remonter vers sa première position, et ainsi sa vitesse primitive sera atténuée, tandis que les autres molécules, surtout celles qui seront les plus éloignées de *d*, poursuivront leur route sans éprouver une diminution notable dans leur vitesse ; cela se concevra encore mieux si, au lieu de quelques molécules, la série en comprend une quantité innombrable. Le résultat sera donc d'opérer, dans la série, un redressement qui compensera ou diminuera la première inflexion. Or un effet analogue se produira s'il s'agit d'une barre, et non pas d'une seule série de molécules. Mais il est vraisemblable, plausible, que l'effet qui se produira alors ne sera pas exactement semblable à celui qui aurait lieu si des forces égales chacune à la moitié de celle appliquée au milieu de la série ou de la barre étaient appliquées chacune à une de ses extrémités aussi normalement à sa direction. (Voir la note 1 à la fin du livre.)

CHAPITRE IV.

DES CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE.

§ I — De l'équilibre des forces appliquées à un système invariable.

Nous avons vu que l'on prétend démontrer qu'un couple, tel qu'on le conçoit, ne peut jamais être tenu en équilibre par une simple force, et que tant de forces qu'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un corps ou système invariable libre, peuvent toujours se réduire à une seule force qui passe par un point donné à volonté et à un seul couple. On en conclut qu'il ne peut y avoir équilibre dans le système, à moins que la résultante des forces ne soit nulle d'elle-même, et que le moment du couple résultant ne soit aussi nul de lui-même.

Des principes admis, on tire plusieurs corollaires, et notamment celui-ci :

Toutes les forces appliquées à un système ne pourront jamais se réduire à une seule, à moins que la résultante de ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point n'ait une direction parallèle au plan du couple résultant, et cela, en quelque lieu de l'espace qu'on ait pris d'abord le point où l'on a transporté toutes les forces.

On professe, conséquemment, que, pour qu'il y ait équilibre des forces parallèles situées dans un même plan, il faut, 1° que la résultante des forces transportées en un point commun A soit nulle d'elle-même, et qu'ainsi, en nommant P, P', P'', etc., les forces, on ait

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0;$$

2° que le moment résultant de tous les moments des couples soit aussi nul de lui-même, et, conséquemment, en appelant p, p', p'', etc., les bras de levier respectifs, qu'on puisse poser

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0.$$

On exprime les conditions de l'équilibre des forces parallèles agissant sur des points quelconques d'un corps en disant qu'il faut, 1° que la somme de toutes les forces soit nulle et que l'on ait encore

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0;$$

2° que la somme de leurs moments pris par rapport à deux plans qui se coupent suivant une parallèle à la direction des forces, soit nulle d'elle-même pour chacun de ces deux plans, ce qu'on exprime par les formules

$$Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.} = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.} = 0,$$

où x, x', x'', etc., y, y', y'', etc., désignent les forces des couples compris dans les deux plans auxquels on rapporte les moments.

S'il s'agit de l'équilibre des forces qui agissent dans un même plan suivant des directions quelconques, on trouve qu'il est nécessaire : 1° que la somme des forces décomposées parallèlement à deux axes qui se coupent dans le plan soit nulle par rapport à chacun de ces axes ;

2° Que la somme des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan soit nulle d'elle-même.

Enfin, à l'égard de léquilibre des forces appliquées comme on voudra dans l'espace, on émet ces conditions :

1° Que la somme des forces décomposées parallèlement à trois axes quelconques soit nulle par rapport à chacun de ces axes, et qu'ainsi l'on ait

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0,$$
$$Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.} = 0,$$

en nommant X', Y', Z' les trois composantes de P' ; X'', Y'', Z'', les trois composantes de P'', et ainsi de suite ;

2° Que tous les couples étant décomposés suivant les trois plans coordonnés, la somme des moments des couples, rapportés à chacun de ces plans, soit nulle d'elle-même, ou, en d'autres termes, que la somme des produits des composantes parallèles au plan de deux axes, par leurs coordonnées relatives au troisième axe, soit nulle d'elle-même pour chacun des trois plans ; condition qu'on formule dans les trois équations

$$X'y' + X''y'' + \text{etc.} - Y'x' - Y''x'' - \text{etc.} = 0,$$
$$Y'z' + Y''z'' + \text{etc.} - Z'y' - Z''y'' - \text{etc.} = 0,$$
$$Z'x' + Y''x'' + \text{etc.} - X'z' - X''z'' - \text{etc.} = 0,$$

On a établi les conditions de l'équilibre dans le cas d'un point fixe dans le système.

« En transportant toutes les forces au point fixe O, on obtient, dit-on, une résultante R et un couple (S, —S). Or on considère que la résultante R est détruite par la fixité du point, et qu'ainsi, pour l'équilibre, il faut et il suffit que le couple (S, —S) soit nul. »

On obtient encore ces conditions en introduisant la résistance R_1 du point fixe. « Soient, dit-on, X_1, Y_1, Z_1, les composantes de la force R_1; puisqu'il y a équilibre, on aura

$$X+X_1=o,\ Y+Y_1=o,\ Z+Z_1=o.$$

» L'introduction de la force R_1 ne donnant aucun nouveau terme dans les expressions L, M, N, qui désignent les moments résultants obtenus en composant les couples situés dans chacun des plans coordonnés, on aura

$$L=o, M=o, N=o.$$

» Les trois premières équations déterminent X_1, Y_1, Z_1 et font voir que la résistance R est égale et directement opposée à R. Les trois autres sont les équations de conditions, et expriment que le couple résultant (S, — S) est nul. »

Voici, maintenant, comment on conçoit les conditions de l'équilibre dans le cas d'un axe fixe.

En supposant dans le système un axe fixe ou, ce qui revient au même, deux points fixes O et H, et en prenant pour axe des z la droite OH, et pour axe des x et y deux droites passant par le point O, on dit que la ré-

sultante des forces transportées parallèlement à elles-mêmes au point O est détruite par ce point fixe ; que les couples résultant de cette translation situés dans les plans zOx et zOy sont détruits par la résistance de l'axe Oz, car on peut faire tourner chacun d'eux jusqu'à ce que les deux forces qui le composent soient perpendiculaires à l'axe fixe qui les détruit toutes ; que, par conséquent, il ne reste plus que le couple N situé dans le plan xOy, qui doit être nul, en sorte que la seule condition de l'équilibre est

$$N = o,$$

ce qu'on énonce en disant que *la somme des moments des forces par rapport à l'axe fixe doit être nulle.*

Si le corps peut glisser le long de l'axe, si, par exemple, il est traversé par une tige fixe et inflexible, les composantes X, Y, et les couples L, M sont détruits par la résistance de l'axe, mais la force Z ne l'est pas et l'on a alors les deux équations d'équilibre.

$$Z = O, N = o..$$

Comme on a établi, pour conditions d'équilibre dans le cas d'un point fixe, les équations

$$L = O, M = O, N = o,$$

on conclut que, pour qu'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide soit en équilibre autour d'un point fixe, il faut et il suffit qu'elles le soient autour de trois axes passant par le point fixe.

On a traité autrement quelques-unes de ces questions relatives aux conditions de l'équilibre, mais je ne crois

pas utile de reproduire tous les procédés employés, dont les résultats sont d'ailleurs semblables ou équivalents à ceux que je viens de rappeler.

D'après mes critiques précédentes, il est visible qu'il n'y a pas lieu d'admettre réellement ces solutions concernant les conditions de l'équilibre. Dans ma doctrine, suivant les principes que j'ai posés et qui sont rationnels, il faut et il suffit, pour qu'il y ait équilibre dans tous les cas dont il s'agit, que toutes les forces appliquées au système supposé invariable, étant transportées parallèlement à elles-mêmes à un point quelconque du système, et étant composées entre elles, leur résultante soit absolument nulle.

Un corps ou système invariable ne pouvant tourner sur lui-même, les conditions admises et énoncées plus haut, de l'équilibre d'un corps ou système ayant un point ou un axe fixe sont fausses, sont théoriquement inadmissibles. Rationnellement, si un système invariable a un ou plusieurs points fixes, tout le système est fixe et dans tous les cas en parfait équilibre.

Je m'occuperai dans un chapitre particulier des conditions de l'équilibre d'un corps reposant sur un plan fixe.

§ II. — De l'équilibre des forces appliquées à des cordons.

Si deux forces P et Q agissent aux extrémités d'une corde supposée flexible et inextensible, on professe que, pour qu'elles se fassent équilibre, la corde doit être tendue en ligne droite, et ces forces doivent être égales, con-

traires et dans la direction du cordon ; car, dit-on, si ces deux forces n'avaient pas la même direction que le cordon, rien ne les empêcherait de le faire tourner, et si, étant dans la même direction, elles n'étaient pas égales et contraires, elles feraient avancer la corde dans sa direction. On appelle *tension du fil* la valeur commune des deux forces.

Considérant trois forces P, Q, R comme agissant sur un même point A par l'intermédiaire de trois cordons qui se réunissent en ce point, on admet qu'elles se font équilibre, si l'une quelconque de ces forces est égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

Si l'on a un système de points A, B, C, D, E, F (fig. 41) situés dans un même plan, liés entre eux par des cordons, voici comment on établit généralement les conditions de l'équilibre des forces appliquées à ce système connu sous le nom de *polygone funiculaire*.

« Supposons l'équilibre établi. Le premier et le dernier cordon, AB et EF, sont sollicités par des forces H et K dirigées nécessairement suivant les prolongements de ces cordons, sans quoi il n'y aurait pas équilibre. Aux différents sommets B, C, D, E, soient appliquées des forces quelconques P, P′, P″, P‴, agissant par l'intermédiaire de cordons qui se réunissent en ces points. Si l'on coupait le cordon CD au point I, l'équilibre serait détruit, et chacun de ces deux points C et D serait entraîné dans une certaine direction. Les deux forces qui solliciteraient alors ces deux points étant détruites, dans l'état d'équilibre, par la liaison que le cordon établit entre eux, sont nécessairement contraires et dirigées suivant le prolongement du cordon CB. Donc on peut poser ce principe, que, *dans l'état d'équilibre, chaque cordon, tel que* CD,

doit être tiré par deux forces égales et contraires qu'on peut supposer appliquées à ses deux extrémités.

» La force P et la force H, dont on peut supposer le point d'application transporté de A en B, ont une résultante X dirigée suivant le prolongement du cordon CB. En effet, puisqu'il y a équilibre, il ne sera pas troublé, si l'on suppose le point C fixe, et on voit alors que X doit avoir la direction BC. La force X mesure en même temps la tension du cordon BC; car, puisqu'il y a équilibre, celui-ci doit être tiré en C par une force égale et contraire à X. En transportant X au point C, on voit de même que la résultante Y des deux forces X et P′ est dirigée suivant le prolongement de CD et mesure la tension de ce cordon. Cette tension Y est donc la résultante des forces H, P, P′ transportées parallèlement à elles-mêmes au point C. En continuant ainsi, on verra que la tension V du dernier cordon s'obtient en composant les forces H, P, P′, P″, P‴ transportées parallèlement à elles-mêmes au point E, et comme il y a équilibre, cette force V est égale et directement contraire à la dernière force K.

» *Ainsi toutes les forces immédiatement appliquées au polygone funiculaire, transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, se font équilibre autour de ce point, et la tension de chaque cordon est la résultante de toutes les forces qui agissent d'un même côté de ce cordon.* »

On est encore arrivé à ce résultat d'une autre manière. « Supposons, a-t-on dit, que le polygone soit solidifié de telle sorte que les droites qui joignent les points consécutifs ne puissent pas changer de longueur. Il en résulte d'abord que toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point doivent s'y faire équilibre. Ensuite l'équilibre ne devant pas être troublé, si,

en supprimant la partie DEK, on applique au point D, suivant le prolongement de CD, une force égale à la tension Y de ce cordon, il faut que la force Y et toutes celles qui agissent sur la partie conservée ABCD se détruisent. La tension du cordon CD est donc égale à la résultante des forces H, P, P', comme on l'a vu par l'autre méthode. »

Ces démonstrations sont-elles complétement satisfaisantes ?

Un cordon *flexible* ne peut être d'une seule pièce continue; il faut, pour qu'il se plie, qu'il soit formé de molécules à distance les unes des autres, de parties mobiles, pouvant changer de position les unes à l'égard des autres, ce qui serait impossible s'il était un seul continu homogène, sans division de parties distinctes séparées. Mais étant composé de parties mobiles, il ne peut être : *inextensible, incompressible, invariable* dans sa longueur, quand un ou plusieurs de ses points moléculaires sont soumis à une ou plusieurs forces tendant à les éloigner ou à les rapprocher les uns des autres. D'ailleurs, il n'est pas plausible qu'il puisse se plier, se contourner, en conservant toujours la même longueur exactement. La théorie relative aux effets des forces appliquées à des cordons isolés ou reliés entre eux, repose donc sur une hypothèse chimérique, non rationnelle, celle de l'invariabilité de la longueur des cordons jointe à leur flexibilité.

L'on a voulu déterminer la tension d'un fil flexible en équilibre, attaché par ses extrémités à deux points fixes A et B, et dont tous les points sont sollicités par de très-petites forces.

« Soit AMB (fig. 42) ce fil, M étant un point quel-

conque de ce même fil. Les deux parties AM, MB, a-t-on dit, exercent l'une sur l'autre, dans l'état d'équilibre, des actions moléculaires égales et contraires. On ne connaît pas la nature de ces actions, mais on admet que toutes celles qui proviennent de AM agissant sur MB, se réduisent à une force unique T appliquée au point M, et que de même la partie MB exerce sur AM une action qui se réduit à une force égale et contraire à T. La valeur commune de ces deux forces est la *tension du fil* au point M. On pourra donc, si l'équilibre existe, supprimer la partie AM, pourvu qu'on applique au point M une force égale à T. »

Or, en considérant le fil comme la limite d'un polygone funiculaire dont les côtés deviennent *infiniment petits*, hypothèse chimérique, on admet que *la tension s'exerce suivant la tangente, au point* M, *à la courbe que forme le fil*, et l'on prétend même démontrer directement ce principe de la manière suivante :

« Fixons un point M', voisin de M, sur le fil et solidifions la partie intermédiaire MM', l'équilibre ne sera pas troublé. Mais alors, d'après les conditions d'équilibre d'un système dans lequel se trouve un point fixe, les couples qui résultent de la translation au point M' de la force T et des forces qui agissent sur tous les points matériels du fil compris entre M et M', doivent se détruire. Comme ces forces ne sont pas nécessairement dans un même plan, le moment du couple (T, — T) est moindre que la somme des moments des couples provenant de la translation des autres forces ou au plus égal à cette somme.

» Si l'on abaisse la perpendiculaire M'H sur la direc-

tion de la force T, et si l'on désigne par θ l'angle M'MH, le moment du couple (T, — T) est

$$T \times M'H = T \times MM' \sin \theta.$$

Soient μ la masse d'un point compris entre M et M' et P la force appliquée à ce point rapporté à l'unité de masse ; μP sera la force motrice appliquée à ce point. Le moment du couple (μP, — μP) est plus petit que $\mu P. \mu M'$ et *à fortiori* que $\mu P. MM'$.

» La somme des moments de tous les couples analogues est donc moindre que $MM'. P_1 \Sigma\mu$, P_1 désignant la plus grande valeur de la force P dans toute la portion MM' du fil et $\Sigma\mu$ la somme des masses des molécules qui composent cette portion du fil.

» On a donc

$$T. MM'. \sin \theta < P_1. MM'. \Sigma\mu.$$

d'où

$$\sin \theta < \frac{P_1}{T} \Sigma\mu.$$

» La tension T a une valeur finie, car elle doit faire équilibre aux forces qui sollicitent la partie BM. Comme l'inégalité précédente a lieu, quelque petit que soit l'arc MM', on voit que si le point M' se rapproche indéfiniment du point M, sin θ et par conséquent θ deviendra plus petit que toute quantité donnée. Mais à la limite la corde MM' deviendra la tangente en M à la courbe ; donc c'est suivant la tangente qu'agit la tension T. »

On voit que, dans cette spéculation, on considère le

fil comme décrivant une courbe continue. Or telle ne peut être la réalité, car le fil étant flexible doit être formé de molécules distinctes, séparées les unes des autres, retenues les unes près des autres, mais à distance. De plus on applique ici la théorie des couples que j'ai ruinée. La démonstration n'est donc point rigoureuse.

Après avoir ainsi déterminé la tension d'un fil flexible sollicité par de petites forces, on a cherché et cru trouver les conditions d'équilibre de ce fil comme il suit :

« Soit un fil AMB fixé à ses deux extrémités A (a, b, c) et B (a', b', c') et dont tous les points sont sollicités par de petites forces. Soient M (x, y, z) et M $(x + dx, y + dy, z + dz)$ deux points *infiniment* rapprochés sur le fil. Faisons $MM' = ds$. Si T et T' sont les tensions du fil aux points M et M', l'arc MM' doit être en équilibre sous l'action de T, de T' et des forces qui sollicitent les points compris entre M et M'. Cet équilibre a encore lieu si l'on suppose l'arc MM' solidifié. Donc les forces doivent être telles, qu'en les transportant parallèlement à elles-mêmes en un point, elles se fassent équilibre.

» Soient ε le produit de la section normale par la densité au point M, P la force qui agit en ce point, et X, Y, Z ses composantes parallèles à trois axes Ox, Oy, Oz. L'arc MM' étant *infiniment petit,* on peut considérer ε, X, Y, Z comme constants pour tous les points de MM'. Or T agissant dans le sens M'M, ses composantes seront

$$-T\frac{dx}{ds},\quad -T\frac{dy}{ds},\quad -T\frac{dz}{ds}.$$

» Les composantes de T' seront égales à celles de T, prises en sens contraire et augmentées de leurs différentielles,

$$T\frac{dx}{ds}+d\left[T\frac{dx}{ds}\right], T\frac{dy}{ds}+d\left[T\frac{dy}{ds}\right], T\frac{dz}{ds}+d\left[T\frac{dz}{ds}\right].$$

D'ailleurs, en considérant MM' comme un petit cylindre,

$$X\epsilon ds,\ Y\epsilon ds,\ Z\epsilon ds,$$

sont les sommes des composantes des forces qui agissent sur les points de l'arc MM'. On a donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} d\left[T\frac{dx}{ds}\right]+X\epsilon ds&=o,\\ d\left[T\frac{dy}{ds}\right]+Y\epsilon ds&=o,\\ d\left[T\frac{dz}{ds}\right]+Z\epsilon ds&=o.\end{aligned}\right.$$

» Dans la question qui nous occupe, il n'y a qu'une seule variable indépendante; supposons que ce soit x. Les équations (1) serviront à déterminer y, z, et l'inconnue auxiliaire T en fonction de x.

» En intégrant d'abord la première des équations (1) par rapport à s, entre les limites qui correspondent aux extrémités du fil, dont la longueur est l, on aura

$$(2)\qquad \int_o^l d\left[T\frac{dx}{ds}\right]+\int_o^l X\epsilon ds=o.$$

» Soient e, f, g; e', f', g' les angles que les tangentes à la courbe aux points A et B font avec les axes; cette équation devient

$$(3) \qquad K\cos e + K'\cos e' + \int_0^l X\varepsilon ds = o;$$

elle signifie que *la somme algébrique des composantes parallèles à l'axe* Ox, *de toutes les forces qui agissent sur le fil, est nulle.* En intégrant les deux autres équations du système (1), on arriverait à la même conclusion, par rapport aux deux autres axes. Ainsi les trois premières équations de l'équilibre sont satisfaites.

» En multipliant les deux premières équations (1) par y et x, et en retranchant la première de la seconde, il en résulte

$$xd\left[T\frac{dy}{ds}\right] - yd\left[T\frac{dx}{ds}\right] + [Yx - Xy]\,\varepsilon ds = o.$$

Or

$$xd\left[T\frac{dy}{ds}\right] - yd\left[T\frac{dx}{ds}\right] = d\left[xT\frac{dy}{ds} - yT\frac{dx}{ds}\right];$$

par conséquent, en intégrant entre o et l, on aura

$$K[a\cos f - b\cos e] + K'[a'\cos f' - b'\cos e']$$
$$+ \int_0^l [Yx - Xy]\,\varepsilon ds = o,$$

équation qui signifie que *la somme des moments de toutes les forces qui agissent sur le fil, par rapport à l'axe* Oz, *est nulle.* On obtiendrait de même les équations des moments par rapport aux deux autres axes....

» Si l'on multiplie les équations (4) respectivement par

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ou $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, en observant que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta, + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = o,$$

on aura

$$dT + \varepsilon (Xdx + Ydy + Zdz) = o,$$

d'où

$$dT = - \varepsilon (Xdx + Ydy + Zdz).$$

» La différentielle de la tension se trouve ainsi exprimée en fonctions des composantes de la force qui agit au point considéré..... »

Cette démonstration analytique est loin de pouvoir être regardée comme exacte. On y considère une courbe comme formée de *droites infiniment petites;* on regarde l'arc ds comme *infiniment petit*, MM' comme un *petit cylindre*. Or on a vraiment affaire à une série de points matériels, moléculaires, distants les uns des autres, non pas à une matière continue et curviligne. D'ailleurs une courbe n'est pas un composé de droites, si petites qu'on les suppose ; l'infiniment petit est impossible.

De ces spéculations inexactes on a déduit l'équation et les propriétés de la chaînette, c'est-à-dire d'une courbe ABC (fig. 43) formée par un fil pesant et homogène, suspendu à deux points fixes A et C.

« Cette courbe, dit-on, est contenue dans le plan vertical passant par les points A et C.... Prenons ce plan vertical pour plan des xy, et traçons deux axes rectangulaires Ox et Oy, le premier horizontal et le second vertical et dirigé de bas en haut. Le système des équations (1) se réduit à

$$d\left[\mathrm{T}\,\frac{dx}{ds}\right] + \varepsilon\mathrm{X}ds = o, \quad d\left[\mathrm{T}\,\frac{dz}{ds}\right] + \varepsilon\mathrm{Y}ds = o.$$

» On peut mettre ces équations sous une forme plus simple. En premier lieu on a $\mathrm{X} = o$. Ensuite le fil étant supposé homogène, si π est le poids de l'unité de longueur, πds sera le poids d'un élément ds. On aura donc $\varepsilon\mathrm{Y}ds = \pi ds$ et les deux équations se réduisent à

$$(1) \qquad d\left[\mathrm{T}\,\frac{dx}{ds}\right] = o, \quad d\left[\mathrm{T}\,\frac{dy}{ds}\right] = \pi ds.$$

» La première équation donne $\mathrm{T}\,\frac{dx}{ds} = \mathrm{const.}$ Appelons πh la tension au point le plus bas de la courbe, tension qui s'exerce horizontalement, on aura

$$\mathrm{T}\,\frac{dx}{ds} = \pi h, \text{ d'où } \mathrm{T} = \pi h\,\frac{ds}{dz}.$$

Portant cette valeur dans la seconde équation, on a

$$(2) \qquad ds = hd\,\frac{dy}{dx}.$$

» Telle est l'*équation différentielle de la chaînette.*

» En remplaçant ds par $dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, puis $\frac{dy}{dx}$ par p, il vient

$$(1) \qquad dx = \frac{hdp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

d'où

$$(2) \qquad x = hl\left[\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right].$$

» Il faudrait ajouter une constante; mais on peut supposer cette constante nulle, si l'on prend pour axe des y la verticale qui passe par le point le plus bas de la courbe, sans du reste fixer l'origine, car, dans cette hypothèse, on doit avoir $x = o$ pour $\frac{dy}{dx}$.

» On tire de l'équation (2)

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{h}},$$

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{dy}{dx} = e^{-\frac{x}{h}};$$

ajoutant et retranchant successivement ces équations l'une de l'autre, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right],$$

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right].$$

Ces deux équations s'intègrent immédiatement, la première donne

$$(3) \qquad y = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right],$$

et la seconde, en remplaçant le radical $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ par $\frac{ds}{dx}$,

(4) $$s = \frac{h}{2}\left[e^{\frac{s}{h}} - \frac{1}{e^{\frac{s}{h}}}\right].$$

» D'après son équation (3), la chaînette est symétrique par rapport à l'axe des y.

» En comparant les équations différentielles avec celles qui résultent de leur intégration, on trouve

$$y = h\frac{ds}{dx},$$

$$s = h\frac{dy}{dx},$$

d'où

$$y^2 - s^2 = h^2.$$

» Ces trois dernières équations sont interprétées géométriquement de la manière suivante :

» La première signifie qu'en chaque point M de la chaînette, la projection MK de l'ordonnée de la courbe sur la normale MN est constante et égale à h. En effet,

$$MK = y \cos PMK = \frac{y}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

» La seconde exprime que la projection MI de l'ordonnée sur la tangente MT est égale à l'arc BM, compté à partir du point le plus bas de la courbe. En effet,

$$MI = IP \operatorname{tang} T = h\frac{dy}{dx};$$

mais $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{h}$: donc $MI = s$.

» Enfin la troisième, conséquence des deux autres, signifie que la longueur désignée par h, l'arc MB et l'ordonnée y forment un triangle rectangle dont l'ordonnée est l'hypothénuse. »

Inutile de dire que ces résultats ne peuvent être plus exacts que ceux que j'ai critiqués plus haut.

CHAPITRE V.

DE LA GRAVITÉ OU PESANTEUR. — DU POIDS. — DU CENTRE DE GRAVITÉ.

On appelle *pesanteur* ou *gravité* la force, la cause quelconque qui fait que les corps tombent, c'est-à-dire se précipitent vers la surface de la terre, quand ils sont abandonnés à eux-mêmes, ne sont pas soutenus. Dans ce mouvement, les corps suivent la direction verticale, c'est-à-dire perpendiculaire à l'horizon, ou plutôt à la surface des eaux tranquilles, qui peut n'être pas horizontale près des hautes montagnes.

On admet généralement, avec Newton, que la pesanteur est causée par l'*attraction* de la terre sur les corps, et qu'elle n'est qu'un cas particulier d'un phénomène général, universel : l'attraction des corps les uns pour les autres.

Newton, en effet, partant des lois de Kepler, est arrivé à celle-ci :

« *Les corps s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse des carrés des distances.*

La pesanteur est considérée comme s'exerçant sur tous les points matériels des corps, dans des directions

perpendiculaires à la surface du globe ou suivant des lignes verticales. D'après cela, les directions prolongées de la pesanteur en différents lieux de la terre convergeraient vers le centre de la terre qui est à peu près sphérique ; mais la petitesse des corps que l'on considère, relativement à la grandeur du rayon, autorise à penser que, sans erreur sensible, on peut supposer la pesanteur parallèle à elle-même dans l'étendue d'un même corps.

D'après l'observation, l'intensité de la pesanteur varie à la surface de la terre avec la latitude ; elle varie aussi sur une même verticale avec l'élévation au-dessus de cette surface ; mais les variations ne sont sensibles que pour des changements considérables de latitude et de hauteur ; elles ne le sont point dans l'étendue d'un corps de dimensions ordinaires.

D'après la définition générale, *le poids d'un corps est la résultante ou la somme de toutes les forces égales de la pesanteur qui agissent sur chacune des molécules de ce corps.*

On appelle *centre de gravité* d'un corps, *le centre des forces parallèles, dues à la pesanteur, appliquées à toutes ses molécules.* C'est, en d'autres termes, le point d'application du poids. On en conclut que le centre de gravité est un point tel que le corps doit rester en équilibre, dans quelque position qu'on le place, en le faisant tourner autour de ce point supposé absolument fixe.

Il est reconnu, admis, que la vitesse de la chute d'un corps est indépendante de sa masse : on connaît, à ce sujet, les expériences faites par Galilée, et qui ont été renouvelées depuis ce savant. Mais alors comment expliquer que le poids soit en raison de la masse, qu'il soit,

comme on le dit, la somme de toutes les forces égales de la pesanteur, qui agissent sur chacune des molécules de ce corps? Les physiciens me paraissent s'être égarés dans leurs conceptions tendant à tracer la ligne de démarcation existante entre la pesanteur et le poids, et à l'explication de la différence notable qui se produit entre ces deux phénomènes ayant cependant une cause commune : l'attraction du globe.

Pourquoi, en un mot, tous les corps qui tombent librement dans le vide, tombent-ils avec une même vitesse en un même lieu, tandis qu'il y a une si énorme différence entre eux, lorsque, n'étant pas libres, ils agissent comme poids? Pourquoi leur masse influe-t-elle si sensiblement dans ce dernier cas, et n'influe-t-elle pas dans le premier?

Voici comme M. Daguin (t. Ier, p. 85, de son *Traité de Physique*) explique que *la vitesse de la chute d'un corps est indépendante de sa masse.*

« Supposons, avec Galilée, dit-il, que les molécules d'un corps soient libres et indépendantes les unes des autres; ces molécules tomberont toutes avec la même vitesse, puisqu'elles sont identiques et soumises à des forces égales, et ne se sépareront pas. Nous pouvons donc, sans rien changer à l'état de mouvement, les supposer liées entre elles de manière à ne former qu'un seul corps. La vitesse de ce corps sera la même que celle d'une de ses molécules, et, par conséqnent, indépendantes de sa masse.

» On se rend compte autrement, ajoute-t-il, de ce principe, en remarquant que, si la masse d'un corps devenait double, triple, quadruple..., son poids, ou la force qui le fait tomber, deviendrait aussi double, triple,

quadruple... ; la vitesse devrait donc rester la même. »

Ces explications ne sont pas justes. Si les molécules d'un corps étaient invariablement liées entre elles, de sorte que l'une ne pût être mue sans toutes les autres et d'un même mouvement, de même que si elles ne formaient qu'un seul continu, il est visible que les corps tomberaient d'autant plus vite qu'ils contiendraient plus de molécules, que leur masse serait plus grande.

Pour expliquer que les corps libres tombent avec une vitesse sensiblement égale, malgré l'inégalité des masses, il faut admettre, au contraire, que les molécules des corps ne sont pas vraiment liées entre elles.

En effet, les molécules d'un corps gardant sensiblement leurs positions relatives, les distances existantes entre elles, on peut les regarder comme étant en équilibre les unes à l'égard des autres ; ce que l'on concevra en admettant que les forces intermoléculaires, c'est-à-dire les forces qui tendent à les réunir et celles qui tendent à les séparer, se font équilibre. Dans cet état, évidemment, si toutes les molécules sont à la fois et directement soumises à une même force, si elles sont toutes attirées en même temps suivant des directions exactement parallèles, elles doivent prendre, toutes à la fois, un même mouvement, exactement comme si chacune était seule soumise à la force dont il s'agit et était d'ailleurs complétement libre ; car l'équilibre existant entre elles persistant, elles n'influent pas les unes sur les autres, la force attractive agit seule sur chacune.

Il n'en est pas de même si toutes les molécules du corps ne reçoivent pas la même action. Si, par exemple, une seule molécule d'un corps est soumise à une impulsion. Dès lors, en effet, l'équilibre qui existait entre les

molécules du corps est rompu. La molécule directement mue par l'impulsion réagit sur les molécules qui lui sont contiguës, celles-ci sur leurs voisines et ainsi de suite de proche en proche. L'effet, en ce cas, est modifié, restreint par la liaison, par les forces moléculaires. La molécule directement tirée éprouve un retard causé par sa cohésion avec les contiguës, celles-ci en éprouvent un elles-mêmes par une cause analogue, de telle sorte qu'une grande masse, en ce cas, est moins mobile qu'une petite lorsqu'une de ses parties seulement est soumise à une force donnée.

En réalité sans doute les molécules des corps ne sont jamais absolument en repos et en équilibre ; toutefois, elles peuvent être assez indépendantes les unes des autres pour obéir à très-peu près également à la force d'attraction de la terre, et ainsi je me rends compte de ce que les corps libres tombent avec une vitesse sensiblement égale :

Maintenant il reste à expliquer pourquoi les poids sont en raison des masses. Voici les considérations et les explications que j'ai présentées à ce sujet dans mes *Discussions sur les principes de la physique*, p. 219 :

« On ne peut alléguer qu'en vertu de son poids un corps agit à la fois par toutes ses molécules, en raison de la vitesse qu'elles auraient si elles étaient libres, sur le corps qui le supporte ou auquel il est suspendu. Il est visible, en effet, que l'action directe et simultanée des molécules d'un corps, en tant que pesant, sur un autre corps, ne pourrait avoir lieu qu'entre les molécules de l'un et de l'autre qui seraient en contact ; or, il est évident qu'il n'y a qu'une faible partie de leurs molécules qui puissent se trouver en cet état. D'ailleurs,

l'effet du poids d'un corps n'est pas en raison de la quantité de sa surface appliquée à celui qui est soumis à cette action.

» Le poids agit par pression ou par traction, suivant que le corps pesant est supporté ou qu'il est suspendu.

» *Poids agissant par pression.* Soit un corps A placé sur un corps B qui l'empêche de tomber, le supporte. Par l'attraction de la terre, toutes les molécules de A sont animées d'un même mouvement vertical. Les molécules qui arrivent au contact avec B, le pressent, et leur vitesse est rallentie par la résistance qu'il leur oppose ; celles formant la tranche suivante se rapprochent des premières ; celles de la troisième couche se rapprochent de celles-ci, et ainsi de suite. Il s'opère donc une compression de la masse totale du corps pesant. Le support lui-même est pressé, comprimé de plus en plus. Or plus il y aura de couches de molécules superposées dans le corps pesant, plus aussi la compression sera considérable : cela résulte de ce que j'ai dit, dans un précédent chapitre, pour expliquer que l'action, la pression ou la résistance qu'exercent l'une sur l'autre des corps qui se choquent, est en raison de leurs masses respectives.

» Je comprends ainsi les effets du poids placés dans les plateaux d'une balance. Je ne crois pas utile de m'arrêter aux applications particulières de l'explication que je viens de présenter.

» *Poids agissant par traction.* — Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une molécule *a* attachée par suspension à un corps. Attirée par la terre, elle sera retardée dans son mouvement par l'effet de son adhérence au corps suspenseur. Or, si, au lieu d'être seule, elle est suivie

verticalement par une autre *b*, celle-ci sera attirée aussi par la terre, et à cause de sa cohésion avec *a*, elle éprouvera un retard par suite de celui de *a*; mais en admettant qu'elle soit moins retenue par *a* que *a* elle-même ne l'est par le suspenseur, ce qui est bien supposable, elle marchera plus vite que *a*, et tendra à l'entraîner, toujours par l'effet de la cohésion. De même, une troisième molécule *c* agira sur *b* à peu près comme *b* a opéré sur *a*, et, bien que ralentie, elle entraînera *b*, qui entraînera *a*. On conçoit ainsi que toute la file tirera le corps suspenseur dans la direction verticale, et que plus elle contiendra de molécules, plus sera intense la traction résultante qu'elle exercera sur les corps.

» Toutes les files verticales du corps suspendu, aboutissant au suspenseur, se comporteront ainsi. Quant aux files qui seraient en dehors du suspenseur, elles seront, sous ce rapport, moins retardées ; mais, retenues par la cohésion des autres files, elles ne se détacheront pas sensiblement de celles-ci, elles suivront à peu près leurs mouvements moléculaires et concourront aussi à tirer verticalement le suspenseur, d'autant plus qu'elles seront plus nombreuses ou contiendront plus de molécules.

» D'après cette manière de concevoir le phénomène, il est facile de comprendre qu'un corps suspendu ait un poids proportionné à sa masse. Il est aussi très-compréhensible qu'il puisse tomber, se séparer subitement du suspenseur. Il suffit d'admettre que la force de traction résultante l'emporte sur la force de suspension, qui tend à retenir le corps, à empêcher sa chute.

» Bien généralement, la suspension ne résulte pas simplement d'une juxta-position, d'une cohésion entre le suspenseur et le corps suspendu : celui-oi est ordinai-

ment accroché, attaché de manière qu'une partie de lui-même est supportée par le suspenseur : alors le poids agit donc par pression et par traction. »

Je ne pense pas avoir à modifier essentiellement ces considérations, ces explications, qui me paraissent plausibles.

Représentant par φ l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse, à l'unité de distance, on exprime l'attraction mutuelle de deux masses m, m' à la distance d par $\frac{\varphi mm'}{d^2}$.

On admet ainsi que deux sphères égales ou inégales s'attirent de telle sorte que l'attraction exercée par l'une sur l'autre est égale à l'attraction de celle-ci sur la première. On raisonne ainsi : appelons A et B deux corps sphériques, et supposons que A contienne 100 molécules et que B en contienne 10 de masse égale. Une molécule de A exercera une certaine attraction sur chacune des molécules de B, et, conséquemment, sur tout le corps B une attraction qui sera représentée par 10 ; l'attraction totale de A sur B, étant cent fois plus forte, sera proportionnelle au produit $100 \times 10 = 1000$. On verrait de même que l'attraction totale de B sur A sera représentée par le même produit $10 \times 100 = 1000$.

Mais il est visible que cette formule $\frac{fmm'}{d^2}$ ne peut représenter la vitesse effective que prend chacun des corps par l'attraction de l'autre. Nous avons vu, en effet, que, dans les cas dont il s'agit, la vitesse est sensiblement indépendante du nombre des molécules du corps attiré, ce qui se conçoit en admettant que chacune d'elles reçoit individuellement et directement une égale action et par

conséquent une égale vitesse, qui n'influe pas sensiblement sur celle des autres. Ainsi la vitesse alors imprimée est indépendante de la masse du corps attiré, mais proportionnelle à celle du corps attirant.

Dans l'action des forces, il y a une différence essentielle à considérer. Si une force est appliquée à quelque point seulement d'un corps, comme dans le cas d'un cheval attelé à une voiture, par exemple, il se peut que la vitesse imprimée alors à ce corps soit en raison inverse de sa masse, et j'ai précédemment expliqué comment cela peut se faire; mais cette proportion-là n'a point de raison d'être, si la force agit à la fois et également sur toutes les molécules d'un corps, comme dans le cas où il s'agit de l'attraction exercée par la terre entière sur toutes les molécules d'un corps libre, non soutenu; car, dans ce cas, chaque molécule est supposée recevoir directement une vitesse égale, quel que soit le nombre total des molécules de ce corps.

La théorie du centre de gravité est une partie importante de la mécanique, mais elle n'est pas exacte, point rigoureusement établie.

Elle est basée sur celle des forces parallèles appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable. Or on a vu que cette théorie est fausse, en ce que, dans l'hypothèse où des forces parallèles seraient appliquées à un système invariable, la résultante devrait être à un point quelconque du système et non pas seulement à celui que la théorie détermine. Sous ce rapport, le centre de gravité, qui, d'après la théorie, devrait être un point *unique*, centre des forces parallèles dues à la pesanteur des corps dont les molécules seraient considé-

rées comme invariablement liées entre elles, est donc chimérique.

Si, d'autre part, l'on suppose que les molécules des corps ne sont pas immuablement liées entre elles, alors on n'a plus de base pour établir une théorie du centre de gravité.

Pour expliquer que les corps tombent avec une égale vitesse, il faut, je le répète, admettre que leurs molécules ont une certaine indépendance, qu'il n'y a pas entre elles une liaison telle, qu'elles ne puissent varier dans leurs distances respectives, et tout, d'ailleurs, vient à l'appui de cette hypothèse; mais alors on ne peut leur appliquer une théorie fondée sur l'hypothèse contraire, celle chimérique de leur invariable liaison.

Supposons un instant que les molécules des corps, bien que tombant avec une égale vitesse quand ils sont libres, soient invariablement liées entre elles, comment alors expliquera-t-on que les poids des corps soient en raison de leurs masses? Etant animés d'une vitesse égale, comment leurs molécules supposées liées de cette manière pourraient-elles agir, comme poids, en raison de leur nombre? Évidemment, dans l'hypothèse, que leur nombre fût tel ou tel, grand ou petit, elles n'opéreraient ni plus ni moins les unes sur les autres. Elles ne sauraient agir sur des supports ou des suspenseurs, en raison de leur quantité, mais seulement en raison de leur vitesse et de la portion de leur surface mise en contact avec ces objets.

On voit donc bien que la théorie du centre de gravité croule de toutes parts.

Les explications que j'ai présentées du phénomène du poids, et qui sont les seules admissibles, ne viennent

point à l'appui de cette théorie. Ici je ne trouve pas une composition et une résultante unique de forces égales. Je vois, au contraire, que les molécules obéissent inégalement aux forces qui les sollicitent, suivant leurs positions respectives. Ainsi, dans le cas de poids agissant par pression, les molécules du corps pesant qui se trouvent immédiatement sur le support doivent être plus pressées que celles qui sont entre le support et les molécules extérieures, qui, elles, n'éprouvent aucune pression. S'il s'agit de poids opérant par traction, les molécules sont plus ou moins retenues par la résistance du suspenseur, suivant qu'elles en sont plus ou moins rapprochées. On peut supposer que généralement, sensiblement, l'effet total des actions moléculaires s'accroît proportionnellement à la quantité des molécules, à la masse du corps pesant, quand il agit comme poids; mais il ne s'ensuit pas que les forces moléculaires participent également à cet effet, et qu'elles aient une résultante, c'est-à-dire qu'il y ait dans le corps pesant un point tel que, si une force égale à la somme de celles opérant sur ses molécules, y était appliquée, elle aurait un effet semblable, égal à l'effet total des mêmes forces s'exerçant individuellement sur les molécules de ce corps. Loin de là, il est visible qu'un tel point n'existe pas.

Il se peut que généralement l'expérience vienne sensiblement confirmer la théorie, mais en soi la théorie est fausse. Il est donc sage sur ce point, comme sur bien d'autres, de se borner à constater les faits donnés par l'expérience.

Au reste, on a fait souvent fausse route quand on a voulu déterminer théoriquement le centre de gravité dans les cas particuliers.

Ainsi, par exemple, pour déterminer le centre de gravité du triangle, Poinsot suppose que sa surface est composée d'une *infinité* de tranches parallèles à la base qui, dit-il, auront leur centre de gravité sur la droite menée du sommet au milieu de la base. Il se fonde sur ce que le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de sa longueur. Mais alors les bandes dont il compose le triangle ne sont donc que des lignes mathématiques, des lignes sans largeur : hypothèse inadmissible ; une surface ne saurait être formée de telles lignes parallèlement unies entre elles.

Le même auteur arrive au même résultat en menant par le milieu de la base du triangle des parallèles aux deux autres côtés, en décomposant ainsi le triangle en deux autres et un parallélogramme, et en se fondant sur cette proposition, que le moment du triangle par rapport à une ligne quelconque menée dans son plan, est égal à la somme des moments du parallélogramme et des deux triangles composants. Dans ce système, le triangle devrait être un ensemble de points mathématiques auxquels on supposerait appliqués des poids égaux ; or, un triangle n'est pas un ensemble de points mathématiques. Dans cette même démonstration, il invoque la sommation d'une progression décroissante *infinie*, sommation impossible et qui ne saurait donner, fût-elle possible, le résultat que Poinsot lui attribue. (Voir mon *Exposé des vrais principes des Mathématiques.*)

Il a présenté, relativement au centre de gravité de la pyramide, une démonstration qui blesse la raison, en ce qu'il y suppose la pyramide composée d'une *infinité* de tranches ou surfaces parallèles à la base. Par la même raison on ne peut non plus accepter sa démonstration

concernant le centre de gravité du prisme triangulaire.

Poisson a cru pouvoir déterminer les centres de gravité en supposant qu'un corps, qu'un volume est composé d'une *infinité* de parties *infiniment petites*, et que l'on parvient par l'intégration, à la sommation de ces entités que rejette la raison.

Ses calculs pèchent de plus en ce qu'il prend pour élément d'une courbe une *droite infiniment petite*. Il établit souvent des rapports de quantité entre des courbes et des droites, contrairement à la raison.

On trouvera, au sujet des théories défectueuses sur la détermination du centre de gravité, quelques développements dans l'*Exposé des vrais principes des Mathématiques* (1).

On admet que deux astres s'attirent comme si la masse de chacun d'eux était réunie à son centre. C'est à leurs centres que l'on rapporte la distance de ces deux astres, dans l'énoncé des lois et les calculs astronomiques. Voyons si l'on est théoriquement fondé à procéder ainsi.

(1) Dans ce livre, p. 365, au sujet de la théorie de Poisson, j'ai dit :
« Après avoir montré que, dans le cas de deux forces dirigées dans un même plan et appliquées aux extrémités d'une droite inflexible, de manière que leurs directions prolongées se coupent en un point K, les deux composantes sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions d'un point quelconque de la résultante, et que la résultante et l'une des composantes sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions d'un point quelconque de l'autre composante ; l'auteur, jugeant que ce théorème a lieu, quelque petit que soit l'angle des deux composantes, conclut qu'il subsiste encore à la limite, où l'angle devient nul et où les forces deviennent parallèles... »
En contestant la légitimité de cette assimilation, j'ai dit que la raison n'autorise pas à la conclure de cette considération de limite qui est invoquée ; qu'il y a une différence essentielle, radicale, entre les deux hypothèses assimilées.
Or je reconnais que sous ce rapport m'a critique n'était pas fondée.

On assure qu'un corps sphérique et homogène attire comme si toute sa masse était réunie à son centre.

Voici comment Poisson a présenté la démonstration de ce principe dans son *Traité de Mécanique*, 1re édition, t. II, p. 20 :

S'occupant d'abord du cas où le corps attirant est homogène et terminé par deux surfaces sphériques, il raisonne ainsi : « Soient C le centre du corps et A le point attiré (fig. 44), il est évident que l'attraction demandée doit être une force dirigée suivant la droite CA, autour de laquelle tout est parfaitement semblable; nous allons donc partager le corps attirant en une infinité d'éléments infiniment petits ; nous décomposerons, suivant la droite CA, l'attraction que chaque élément exerce sur le point A ; puis nous ferons, par le procédé de l'intégration, la somme de toutes les composantes, et cette somme exprimera l'attraction du corps entier.

» Soit m un point quelconque de la masse du corps ; désignons par r sa distance Cm au centre C, et par θ, l'angle m CA, aigu ou obtus, que fait la droite Cm avec la droite CA ; menons arbitrairement, par cette dernière droite, un plan indéfini BCA, et soit ω l'angle compris entre ce plan et celui des deux droites Cm et CA. La position du point m dans l'espace sera déterminée au moyen des deux angles ω et θ, et du rayon r; ces trois coordonnées varieront en passant d'un point à un autre, et l'on conçoit qu'on pourra les étendre à tous les points du corps : 1° en donnant à r toutes les valeurs comprises depuis le rayon de la surface intérieure jusqu'au rayon de la surface extérieure; 2° en faisant croître l'angle ω, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 400°$; 3° en fai-

sant croître l'angle θ, seulement depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 200^\circ$.

» Le volume de l'élément du corps, qui répond aux trois coordonnées r, θ et ω, sera égal à $r^2 \sin \theta . dr d\theta d\omega$; en multipliant ce volume par la densité du corps, que nous désignerons par ρ, on aura la masse du même élément; de plus, si l'on appelle x la distance Am de cet élément au point A, et qu'on fasse CA $= a$, on aura, dans le triangle, CAm,

$$x^2 = a^2 - 2ar. \cos \theta + r^2,$$

et l'attraction de cet élément, sur le point A, sera exprimé par

$$\frac{\rho f r^2 \sin \theta . dr d\theta d\omega}{x^2};$$

f désignant, comme précédemment, l'intensité de l'attraction à l'unité de distance et pour l'unité de masse.

» Cette force est dirigée suivant la ligne Am; pour la décomposer suivant la ligne AC, il faut la multiplier par le cosinus de l'angle CAm. Or, en abaissant du point m la perpendiculaire mD sur la droite AC, on aura CD $=$ $r. \cos \theta$, AD $=$ AC $-$ CD $= a - r. \cos \theta$, et

$$\text{Cos CA}m = \frac{\text{AD}}{\text{A}m} = \frac{a - r. \cos \theta}{x};$$

par conséquent, la force décomposée sera égale à

$$\frac{\varphi f r^2 (a - r. \cos \theta). \sin \theta . dr d\theta d\omega}{x^3}.$$

» La valeur de x étant donnée par une extraction de racine carrée, on peut la prendre indifféremment avec le signe + ou avec le signe —; nous supposerons cette quantité toujours positive; ainsi, par exemple, pour l'élément qui répond $a\,\theta = 0$, on a

$$x^2 = a^2 - 2\,ar + r^2 = (a - r)^2\,;$$

on a donc, ou $x = a - r$, ou $x = r - a$: nous prendrons la première valeur, si $a > r$, et la seconde si $a < r$. De cette manière, la valeur de la force décomposée sera positive ou négative, selon qu'on aura $a > r.\cos\theta$, ou $a < r.\cos\theta$, c'est-à-dire selon que l'angle CAm sera aigu ou obtus. Dans le premier cas, l'attraction de l'élément situé au point m tend à rapprocher le point A du centre C; dans le second cas, cette attraction tend à éloigner le point A de ce centre : nous regardons donc comme positives les composantes qui tendent à rapprocher le point A du centre du corps, et comme négatives celles qui tendent à l'en éloigner; et en ayant égard à cette opposition de signe, la force totale qui agit sur le point A est égale à la somme de toutes les composantes, quelle que soit la position de ce point. Il ne s'agit donc plus que d'intégrer la formule précédente, successivement par rapport aux trois variables r, θ et ω, et d'étendre l'intégrale à la masse entière du corps.

» Les intégrations relatives à ces variables peuvent être effectuées dans tel ordre qu'on voudra; le plus simple sera d'intégrer d'abord par rapport à ω, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 400°$; ensuite, par rapport à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 200°$; enfin, par rapport à r, en prenant pour limites les rayons des surfaces intérieure et extérieure du corps.

» En observant que la densité ρ est constante, et que x est indépendante de ω, la première intégration donne évidemment

$$\frac{2\,\pi\,\rho\,f\,r^2\,(a - r.\,\cos\theta).\,\sin\theta.\,dr d\theta;}{x^3}$$

π représentant la demi-circonférence pour le rayon égal à l'unité.

» Pour intégrer cette formule relativement à la variable θ, et en considérant r comme une constante, je vais la transformer en une autre, dans laquelle x soit la variable. Or, en différentiant la valeur de x^2 par rapport à θ, on a

$$x dx = ar.\,\sin\theta.\,d\theta;$$

cette valeur de x^2 donne aussi

$$a - r.\,\cos\theta = \frac{x^2 + a^2 - r^2}{2a},$$

la formule à intégrer devient donc

$$\frac{\pi\,\rho\,fr.\,dr}{a^2}\;\frac{(x^2 + a^2 - r^2)}{x^2}.\,dx;$$

et son intégrale indéfinie, prise par rapport à x, et en regardant r comme une constante, est

$$\frac{\pi\,\rho\,fr.\,dr}{a^2}.\left[x - \frac{a^2 - r^2}{x}\right] + \mathrm{C};$$

C étant la constante arbitraire.

» Les limites de l'intégrale relative à θ étaient $\theta = 0$,

et $\theta = 200°$; pour ces valeurs, on a $x^2 = (a - r)^2$, $x^2 = (a + r)^2$, c'est-à-dire, $x = \pm (a - r)$, $x = a + r$, le signe $+$ ayant lieu quand $a > r$, et le signe $-$, quand $a < r$; donc il faut prendre $\pm (a - r)$ et $a + r$, pour les limites de l'intégrale relative à x. Substituant successivement ces limites à la place de x, dans l'intégrale indéfinie, il vient

$$\frac{\pi \rho f r . dr}{a^2} . \left[\pm (a - r) \mp (a + r) \right] + C,$$

$$\frac{\pi \rho f r . dr}{a^2} . \left[a + r - (a - r) \right] + C;$$

en faisant les réductions, a disparaît entre les parenthèses, dans ces deux résultantes; et si l'on retranche ensuite le premier du second, pour avoir l'intégrale définie, on trouve

$$\frac{2 \pi \rho f r . dr}{a^2} . [r \pm r].$$

Le signe supérieur correspond au cas de $a > r$, et le signe inférieur à celui de $a < r$.

» Observons maintenant que, si le point A est placé dans la partie vide du corps (fig. 45), on a $a < r$, relativement à tous ses éléments, il faut donc alors prendre le signe inférieur, ce qui réduit à zéro la quantité précédente; d'où l'on conclut que *l'attraction d'une sphère creuse, homogène et d'une épaisseur constante, sur un point matériel placé dans son intérieur, est toujours nulle.*

» Ainsi, quel que soit le lieu où l'on place un corps de figure quelconque dans l'intérieur de cette sphère, il y restera en équilibre; car la résultante des attractions

que chaque point du corps éprouve, étant nulle, le corps ne sera sollicité par aucune force.

» Si le point A est placé hors du corps attirant (fig. 44), on aura $a > r$; prenant donc le signe supérieur, dans la formule précédente, on aura

$$\frac{4\pi\rho f}{a^2} . r^2 \, dr,$$

et, en intégrant par rapport à r,

$$\frac{4\pi\rho f}{3a^2} . r^3 + \mathrm{C};$$

C étant la constante arbitraire. Soient donc l et l' les rayons des surfaces extérieure et intérieure du corps attirant; l'intégrale définie, prise depuis $r = l'$ jusqu'à $r = l$, sera

$$\frac{4\pi\rho f}{3a^2} . (l^3 - l'^3).$$

» Cette quantité exprime la force attractive qui agit sur le point A, suivant la droite AC. Or si l'on désigne par M la masse du corps attirant, ou le produit de son volume par sa densité, et si l'on fait attention que ce volume est la différence de deux sphères dont les rayons sont l et l', on aura

$$\mathrm{M} = \frac{4\pi\rho}{3} . l^3 - \frac{4\pi\rho}{3} . l'^3;$$

par conséquent la force attractive deviendra $\frac{\mathrm{M}f}{a^2}$. Elle est

la même que celle d'un point matériel dont la masse serait M, et qui serait placée au point C; il en faut donc conclure que l'*attraction d'un corps sphérique et homogène, sur un point extérieur, est la même que si la masse entière de ce corps était réunie à son centre.*

» Ce théorème subsisterait encore, si le corps attirant, au lieu d'être entièrement homogène, était seulement composé de couches homogènes, sphériques et concentriques; car l'attraction de chaque couche est la même que si la masse était réunie au centre commun, et l'attraction du corps entier est égale à la somme des attractions de toutes ses parties. »

Cette démonstration n'est point rigoureuse.

D'abord, un corps ne peut être composé d'une infinité d'éléments infiniment petits. Quelque petit que soit l'élément d'un corps, une infinité d'éléments semblables ajoutés les uns aux autres formeraient une étendue infinie, au moins dans une direction, un sens. Si, par élément infiniment petit, on entendait un point mathématique, c'est-à-dire *sans étendue*, ce serait *réaliser* une chimère, et vouloir composer l'étendue, celle d'un corps, de choses inétendues; ce qui serait absurde.

Secondement, dans cette analyse, on n'a pas égard à la distance pouvant exister entre les points matériels ou molécules composant un corps; on considère des lignes, des surfaces et des volumes continus, sans tenir compte des espaces intermoléculaires. La démonstration ne pourrait donc s'appliquer, valoir, que pour une sphère absolument continue, n'offrant aucun vide. On multiplie, il est vrai, l'élément par ρ, représentant la densité du corps, mais toujours est-il qu'en même temps on opère en supposant des espaces continus, et l'on peut objecter

que, s'il est vrai que la démonstration soit acceptable en ce qui concerne des étendues matérielles continues, elle ne prouve pas qu'il en doive être de même pour des corps composés de parties distantes les unes des autres, comme ceux que nous offre généralement la nature.

Troisièmement. Comme un élément matériel serait étendu, divisible par la pensée, on aurait à se demander s'il attire comme si sa masse entière était réunie à son centre de figure, étant supposé régulier, ou à quel point, suivant sa forme, il attire comme si sa masse y était réunie. La question serait ainsi reculée sans être résolue. On ne saurait conjurer cette objection, en alléguant l'extrême petitesse de l'élément; car, les grandeurs n'étant que relatives, la question serait la même, quelle que fût l'étendue du corps considéré.

Quatrièmement. Dans cette même analyse, on suppose des rapports de quantité entre des droites et des courbes essentiellement différentes. Ainsi, on conçoit une sphère comme composée de petits éléments semblables, égaux, de petits cubes; on suppose que des sphères inégales sont entre elles comme les cubes de leurs rayons; et tout cela est rationnellement inadmissible.

Laplace, dans sa *Mécanique céleste*, a présenté une démonstration du même principe, qui diffère très-peu de celle que je viens de reproduire et qui pèche sous les mêmes rapports que celle-ci.

D'ailleurs, quand même une sphère attirerait comme si toutes ses molécules étaient réunies à son centre, il ne s'ensuivrait pas qu'une sphère est attirée elle-même de cette manière. Que les molécules d'une sphère A soient ou ne soient pas liées entre elles, chacune attirant cha-

que molécule de la sphère B, je comprends bien que l'attraction totale de A sur chaque molécule de B sera égale à la somme des attractions partielles opérées par toutes les molécules de A ; mais si les molécules de B ne sont pas liées invariablement entre elles, l'effet de l'attraction totale de A sur B ne sera pas égal à l'effet de la somme des attractions reçues individuellement par les molécules de B. Il en serait de même de l'attraction de B sur A. Il n'est donc pas vrai, à ce point de vue, qu'une sphère soit attirée comme elle attire ; car, nous l'avons vu, les molécules d'une sphère ne peuvent être regardées comme invariablement liées entre elles. Si elles étaient telles, il serait impossible de s'expliquer que des sphères de masses inégales ne gravitent pas, avec une vitesse proportionnée à leurs masses, vers une autre sphère qui les attire, toutes choses d'ailleurs étant supposées égales.

En reconnaissant que, dans l'attraction mutuelle de deux sphères, la vitesse imprimée à chacune n'est pas égale à la somme des vitesses qui seraient imprimées individuellement à toutes ses molécules, dira-t-on que toutes les molécules de chaque sphère, par l'effet combiné de leur cohésion et de l'attraction de l'autre sphère, prennent une même vitesse égale à celle que l'attraction de l'autre sphère imprimerait à une molécule située au centre de la sphère attirée, et que c'est de cette manière, en ce sens, qu'on peut dire qu'une sphère est attirée comme si toutes ses molécules étaient à son centre ?

Je répondrais que cette hypothèse ne saurait être théoriquement démontrée, et que sans doute l'effet en question doit varier suivant les circonstances ; il doit être

principalement subordonné à la grandeur de la sphère attirée et au degré de cohésion existante entre ses parties. Soient deux sphères, A et B, soumises à leur attraction mutuelle en raison des masses et en raison inverse du carré des distances ; supposons que les molécules de B soient très-cohérentes, très-liées entre elles par leur attraction mutuelle. Si, dans cette hypothèse, la sphère B est notablement grande, si elle a le volume de la terre, par exemple, les molécules de ce corps seront très-inégalement attirées par A, surtout si A n'est pas à une distance relativement très-grande de B ; mais, à cause de leur forte cohésion, il est supposable qu'elles prendront toutes une vitesse à peu près égale, et que cette vitesse ne différera pas beaucoup de celle que l'attraction de A imprimerait directement à une molécule placée au centre de B. La cohésion, en effet, tendra puissamment à égaliser leur mouvement, et leur vitesse résultante devra être intermédiaire entre celles moins grandes directement imprimées aux molécules les plus éloignées de A, et celles plus grandes que les molécules les plus près de A en recevront aussi directement.

Si, au contraire, la sphère attirée B était formée de molécules très-peu cohérentes entre elles, les attractions très-inégales directement exercées par A sur ces molécules prévalant sur leur cohésion, ces mêmes molécules seraient très-inégalement mues : celles qui seraient plus rapprochées de A prendraient un mouvement beaucoup plus rapide que celui qui affecterait les plus éloignées. Dans ce cas donc, elles ne prendraient point une vitesse égale à celle d'une molécule centrale.

On verra, d'ailleurs, dans le chapitre où je traiterai spécialement de la *Mécanique céleste,* que ces conclusions

théoriques s'accordent avec les applications pratiques, et notamment avec celles relatives aux phénomènes des marées. On verra même qu'elles peuvent servir à expliquer comment se sont établis primitivement les mouvements rotatoires des planètes et du soleil, et certaines perturbations ou inégalités qui se sont produites dans les mouvements apparents de notre satellite.

L'on s'est livré à des analyses ayant pour objet l'attraction d'un ellipsoïde sur un point intérieur ou extérieur, et l'on en a conclu :

1° Que l'attraction d'un ellipsoïde sur un point intérieur reste parallèle à une même direction pour tous les points situés sur une ligne droite passant par le centre, et qu'elle est proportionnelle à la distance du point attiré au centre ;

2° Qu'une couche homogène comprise entre deux surfaces ellipsoïdales concentriques semblables et semblablement placées (homothétiques), n'a aucune action sur un point placé dans l'espace vide intérieur, et par conséquent que l'action d'un ellipsoïde sur un point de sa propre masse se réduit à celle de la partie de ce corps qui est terminée par une surface concentrique semblable à la sienne et passant par le point donné ;

3° Que l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur μ est ramenée à l'attraction d'un ellipsoïde homofocal sur le point μ' correspondant (1).

Les analyses au moyen desquelles on a obtenu ces solutions offrent des irrationalités analogues à celles que

(1) Lorsque deux ellipsoïdes ont leurs axes dirigés suivant les trois mêmes axes rectangulaires, on appelle *points correspondants* deux points dont les coordonnées sont proportionnelles aux demi-axes auxquels elles sont parallèles.

j'ai signalées au sujet de l'analyse concernant l'attraction d'une sphère sur un point intérieur ou sur un point extérieur. Je consacrerai une note, mise à la fin de cet ouvrage, à l'exposition critique de ces spéculations, en ce qu'elles ont de plus important.

CHAPITRE VII

DES FORCES DIRIGÉES VERS ET SUR UN PLAN SUPPOSÉ FIXE

On enseigne que si un corps C (fig. 46), placé sur un plan fixe AB, est animé d'une force P dirigée normalement vers ce plan, cette force P sera anéantie par la résistance du plan, de sorte que, si le corps C, dans cette position et cet état, reçoit une impulsion représentée par CD parallèle au plan, la force P n'influera aucunement sur le mouvement du mobile C qui se mouvra ainsi parallèlement au plan avec toute la vitesse que la seule impulsion CD peut lui communiquer.

La mécanique fait une fréquente application de ce principe. A-t-on une force oblique à un plan supposé fixe ? On décompose cette force en deux autres, l'une normale au plan, qui, dit-on, est détruite, et dont on ne tient pas compte, l'autre parallèle au plan et qu'on regarde comme agissant effectivement.

Je conteste le principe dont il s'agit.

On ne peut supposer qu'un plan soit absolument fixe, inébranlable, inflexible. Cette hypothèse serait contraire à l'idée de l'inertie. Un corps solide sur lequel porterait le corps animé de la force normale devrait plus ou moins céder sous la pression, être plus ou moins en mouve-

ment par l'effet de cette pression même, s'il n'était pas en même temps doué, animé d'une force égale, et directement opposée à celle qui le presse, ce qui n'est pas supposé ici.

Si un corps A non élastique, ayant une vitesse uniforme, en rencontre un autre B libre et en repos, il est admis que les deux corps, après le choc et la compression, auront une même vitesse *u* et qu'ils seront alors en équilibre l'un avec l'autre, ne se pressant ni l'un ni l'autre. Mais si A est animé d'une force constante, persistante P, et qu'il rencontre dans le sens de cette force le corps B libre et en repos, on admettra aussi que, dans ce cas, A, après le choc, continuera à presser plus ou moins B, et qu'il l'entraînera avec une vitesse accélérée. Ainsi ces deux corps ne seront pas en équilibre l'un avec l'autre. Or un phénomène analogue se produira si A, animé d'une force constante P, sans choquer B, est placé sur ce corps de manière à le presser normalement au plan de contact par l'exercice de cette force. Il s'ensuit que, si alors le corps A reçoit une impulsion parallèle au plan de contact, les vitesses normale et parallèle de A se composeront l'une avec l'autre, et A se trouvera ainsi presser obliquement B. Or, en ce cas, les corps étant des composés de molécules distantes les unes des autres, étant compressibles, je conçois que A puisse glisser sur B, si du moins ces corps ne sont pas dépourvus d'élasticité. En effet, l'impulsion oblique résultante de A doit tendre alors à faire réfléchir plus ou moins ce mobile sur le plan que B peut lui offrir, et je conçois que cette tendance combinée avec la vitesse oblique résultante puisse déterminer un mouvement, un glissement de A sur ce plan. Mais l'intensité de ce glissement ne dépendrait pas seulement de

la grandeur de la composante parallèle, mais encore de la grandeur de la force normale, et aussi du degré d'élasticité des corps, notamment de celle du corps sur lequel glisserait le mobile. Ainsi, même à ce point de vue, la mécanique ne serait point fondée à ne tenir compte, comme elle le fait, que de la composante parallèle. J'ai donné ailleurs des explications à ce sujet (1).

Mais si, au contraire, les corps sont considérés, abstraction faite des compressions qu'ils peuvent éprouver, des effets possibles de ces compressions, il y a lieu de décider qu'un corps qui pousse obliquement un autre corps ne peut glisser sur ce dernier, sur le plan que ce dernier présenterait à son contact.

Pour nous dégager de toute préoccupation au point de vue de l'effet des compressions moléculaires, et prendre la question telle qu'elle est posée et résolue dans sa généralité, supposons qu'il s'agisse d'un plan AB (fig. 46 bis) présenté par un corps non formé de molécules, un corps d'un seul tout continu et, conséquemment, parfaitement incompressible. Supposons que le corps C placé sur ce plan soit lui-même un seul tout continu, et qu'il pousse obliquement le plan AB avec une force P, dans la direction de la flèche.

Si, dans cette hypothèse, le plan AB est mobile, n'est point fixe, il est visible que la force P qui anime le corps C poussera ce plan dans la direction de P, c'est-à-dire obliquement au plan, de sorte que AB arrivera, par exemple, en A'B', et le corps C sera alors en C'. Il est donc évident que le corps C ne glissera pas sur le plan. Veut-

(1) Voir ma réponse à un rapport de M. Trouessart sur mon œuvre intitulée : *Discussions sur les principes de la physique* : brochure in-8°.

on maintenant que le plan soit fixe, absolument fixe? Dans cette hypothèse, toutes choses d'ailleurs égales, il est encore visible que le corps C ne glissera pas sur le plan ; seulement le plan l'arrêtera, de même qu'il l'arrêterait normalement si son mouvement était normal.

Si la force P du corps C est normale au plan supposé fixe, qu'arrivera-t-il si le corps C (fig. 46), poussant normalement le plan sans pouvoir avancer, reçoit une impulsion parallèle au plan? Evidemment la force P se composera avec la vitesse parallèle, et il en résultera une force oblique R. De même que l'on décompose une force oblique au plan en deux autres, l'une normale, l'autre parallèle, de même il est bien permis de faire l'inverse en composant ces dernières pour en faire une force oblique ; et cette composition est ici nécessaire ; elle doit se faire d'elle-même. Mais, je le répète, la force oblique ne fera point glisser le corps C sur le plan fixe; son effet sera entièrement empêché par ce même plan, de telle sorte que C ne pourra bouger de sa place, malgré l'impulsion parallèle qu'il a reçue en même temps qu'il était soumis à la force normale P.

Il n'en serait pas de même, si le plan AB était animé d'une force normale opposée et égale à celle du corps C. En ce cas, les deux forces normales opposées se faisant équilibre, annulant ainsi mutuellement leur effet, une impulsion parallèle au plan, qui viendrait agir sur C, le ferait mouvoir sur ce plan exactement comme s'il n'était soumis à aucune autre force. On peut voir, en effet (fig. 47), que, par la composition de la force parallèle avec les forces verticales opposées, on aurait une résultante parallèle au plan, égale à la vitesse qui serait résultée de l'impulsion parallèle seule.

Ainsi, on le voit, un plan supposé fixe ne se comporterait pas, à l'égard d'un corps qui le pousserait avec une force P, comme un corps qui, animé d'une force P, ferait équilibre à un autre corps soumis à une force égale et contraire. Dans ce dernier cas, les deux forces opposées paralyseraient, détruiraient respectivement leur effet, et les deux corps auraient ainsi toute liberté pour obéir aux autres forces auxquelles ils seraient soumis. Dans l'hypothèse du plan fixe poussé par un corps, ce corps est arrêté sur le plan par la fixité supposée du plan ; mais néanmoins la force du corps étant constante, persistant malgré la fixité du plan, peut se composer avec une autre force, avec une impulsion donnée au corps qu'elle anime déjà, et avoir ainsi une part dans le mouvement effectif du mobile, si la résultante est dirigée de manière à ne pas trouver un obstacle dans la fixité du plan.

Si l'on eût fait cette distinction bien fondée et bien importante au point de vue théorique, on n'eût pas admis, consacré dans la science, le principe erroné que je rejette.

C'est en se fondant sur cette erreur de principe, que l'on considère un corps en repos à la surface de la terre, comme étant en état d'inertie, comme n'opposant aucune autre résistance que son inertie à une impulsion horizontale. Il résulte de la critique à laquelle je viens de me livrer, que cette doctrine ne peut être vraie, du moins au point de vue où l'on se place. Pour la soutenir, il faudrait que l'on pût regarder la pesanteur comme entièrement annulée par une force égale et contraire qui *repousserait* verticalement le mobile. Or ce n'est pas là ce qu'on prétend : on se borne à penser, à dire que la

terre, par sa fixité relative, par sa résistance, détruit l'effet de la pesanteur du mobile placé à sa surface, et que, par suite, cette pesanteur ne peut en rien influer sur le mouvement horizontal de ce mobile qui n'oppose alors que son inertie à l'impulsion horizontale qui lui est donnée. Voyons, d'ailleurs, si l'on peut justement regarder le mobile comme repoussé par la terre avec une force égale et opposée à la pesanteur, au poids du mobile.

Supposons un corps ABCD (fig. 48) d'une masse égale à celle de la terre. Supposons que ce corps soit régulièrement sphérique, formé de partie en tous points semblables et à distance les unes des autres, retenues les unes près des autres par leur cohésion ou attraction mutuelle, et empêchées de se réunir en une seule masse continue par l'éther ou fluide répulsif placé entre elles. Admettons, d'ailleurs, si l'on veut, que la densité de cette sphère aille en croissant uniformément de la surface au centre.

Maintenant plaçons sur cette même sphère, au point A, un corps relativement fort petit par sa masse et son volume, que nous supposerons aussi formé de parties distantes les unes des autres. A cause de son extrême petitesse relative, je le représente par le point matériel A.

Dans l'hypothèse admise que les corps s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré des distances, le corps A sera attiré par la masse entière de la grande sphère qu'il pressera ainsi fortement. La grande sphère ne sera attirée par le très-petit corps A que très-faiblement, insensiblement, et sous ce rapport elle ne pourra presser beaucoup le petit corps. J'ai expliqué plus haut comment il peut se faire que les

corps à la surface de la terre aient un poids proportionnel à leur masse. Or cette explication ne saurait ici s'appliquer justement pour faire admettre que la grande sphère pèse sur le petit corps en proportion de la masse relativement énorme dont elle se compose elle-même. En effet, c'est à peine si l'attraction du petit corps remue les molécules de la grande sphère, et comme d'ailleurs ces molécules sont, pour la plus grande partie, très-éloignées du petit corps, et qu'elles le sont très-inégalement, il s'ensuit que, par l'attraction de A, les molécules de ABCD ne peuvent agir les unes sur les autres, se presser entre elles de manière à opérer sur A une pression totale considérable, un poids qui soit justement en raison de leur nombre, de la masse entière de ABCD; tandis que les molécules de A seront toutes mues par l'attraction de ABCD avec une vitesse notable et sensiblement égale, et devront ainsi arriver à presser toutes sensiblement une partie de la surface de ABCD. Il n'est donc pas admissible que le grand corps pressé pousse autant le petit que celui-ci pousse le grand, et, conséquemment, je conteste que les deux corps soient exactement en équilibre. Le poids du petit corps peut donc avoir une influence plus ou moins grande sur son mouvement effectif, lorsqu'il reçoit une impulsion même horizontale ; il n'est pas retenu en repos à la surface du globe uniquement par sa force d'inertie. Si unie, si polie que fût la surface sur laquelle reposerait le corps, son poids serait une cause de ralentissement de la vitesse qu'on pourrait lui imprimer sur cette surface.

Au reste, là n'est pas la question essentielle. Quand même il serait vrai que, dans ce cas, un mobile devrait être considéré comme libre, comme en état d'inertie, il

resterait toujours la question générale et théorique de savoir si, étant supposé qu'un corps solide, incompressible, placé sur un plan absolument fixe, est soumis à une force perpendiculaire à ce plan, l'effet de la force se trouve alors nécessairement anéanti par la fixité même du plan, ou si, au contraire, la force n'est qu'empêchée dans son exercice, par l'obstacle, par la résistance du plan, de sorte qu'elle peut se composer avec une autre force, avec une impulsion même parallèle au plan, et déterminer ainsi une résultante qui, si l'autre composante est parallèle au plan, sera oblique à celui-ci et sera néanmoins arrêtée par sa fixité, mais qui, dans d'autres cas, selon la direction de l'autre composante, pourra donner au mobile un mouvement effectif. Or, pour moi, je n'hésite pas entre ces deux solutions. La mécanique n'est pas dans le vrai quand elle admet *théoriquement* que, dans le cas où le mobile est animé d'une force normale et d'une force parallèle au plan supposé fixe, on doit regarder la première de ces forces comme anéantie, et ne tenir compte que de la dernière.

Il se peut que, pratiquement et généralement, on ne commette pas une erreur sensible en considérant la force normale au plan comme détruite, comme étant de nul effet, par la résistance du plan. Il peut, en effet, arriver que, par l'action du fluide répulsif existant entre le plan et le corps animé de la force normale, ce corps et ce plan se trouvent à très-peu près en équilibre. D'ailleurs, le fluide intermoléculaire du corps qui présente le plan sur lequel porte le corps animé de la force normale étant alors comprimé, acquiert une force de ressort qui peut repousser le corps qui le comprime, et, sous ce rapport,

on peut supposer que cette force provenant de la compression est sensiblement égale et contraire à la force normale ; qu'ainsi les deux corps sont, sensiblement aussi, en équilibre ; mais qu'on ne dise pas que, si un plan était fixe, et par cela seul qu'il le serait, une force normale dirigée vers lui serait anéantie, sans aucune autre influence, et qu'ainsi le corps soumis à cette force normale serait en état d'inertie, exactement comme s'il n'était soumis à aucune force.

CHAPITRE VIII

DES DIVERSES ACTIONS DES CORPS. DU PRINCIPE D'ÉGALITÉ DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION. DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

Il est admis que, si deux masses m, m' non élastiques, animées de vitesses différentes, se choquent *directement,* c'est-à-dire se rencontrent en suivant une même droite passant par leurs centres de gravité A, normale à leurs surfaces aux points par lesquels ils se rencontrent, ces masses se compriment et se déforment mutuellement, jusqu'à ce que leur vitesse soit devenue la même.

« Soient, dit M. Daguin (t. 1er, p. 439) m et m' les masses des deux corps a et b dont les vitesses sont v et v', vitesses comptées positivement de gauche à droite, et négativement en sens contraire. En vertu de l'*inertie*, la quantité de mouvement gagnée par l'un des corps doit être égale à celle que l'autre a perdue. Or, en appelant u la vitesse commune après le choc, et supposant que v est plus grand que v', la quantité de mouvement perdue par le corps a sera $vm - um = (v-u)\,m$, et celle qu'a gagnée le corps b sera $(u - v')\,m'$. On aura donc

$$(v - u)\,m = (u - v')\,m'\;;\ \text{d'où}\ u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.\text{»}$$

Je ne vois pas que de l'inertie bien entendue, on puisse conclure, comme on le fait ici, que la quantité de mouvement gagnée par l'un des corps doit être égale à celle que l'autre a perdue.

On est arrivé au même résultat par d'autres considérations. Invoquant le *principe de d'Alembert*, ou encore le *principe d'égalité de l'action et de la réaction*, principes d'après lesquels il doit y avoir équilibre entre la quantité de mouvement perdue par m et celle gagnée par m', on a posé aussi

$$m(v-u)=m'(u-v')\,;$$

d'où

$$u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

On suppose ici que v et v' allaient dans le même sens. Quand les corps vont l'un au devant de l'autre, la formule, par un changement de signe, devient

$$u=\frac{mv-m'v'}{m+m'}.$$

Je discuterai bientôt les principes mêmes sur lesquels on fonde ces résultats.

Si les corps qui se rencontrent par un choc direct sont élastiques, on admet que les corps, au moment où ils se rencontrent avec des vitesses v, v', s'aplatissent mutuellement jusqu'à ce que leur vitesse soit devenue la même, et que les choses se passent jusqu'à ce moment, comme dans le cas des corps mous ; qu'à partir de ce moment les corps tendent à reprendre leur première forme, et que l'effet de l'élasticité est ainsi d'im-

primer aux corps parfaitement élastiques une quantité de mouvement égale à celle qu'ils ont déjà perdue ou gagnée, suivant les cas, de sorte que, pendant la seconde partie du phénomène, la vitesse de chaque masse varierait de la même quantité que pendant la première.

Supposons, par exemple, que les deux masses m et m' se meuvent dans le même sens, et soit $v > v'$. La vitesse perdue par m, quand, après le choc, les deux corps auront un même mouvement u, sera exprimée par $v - u$; celle gagnée par m' le sera par $u - v'$. Or, pendant la deuxième partie du phénomène, la vitesse de m perdant encore, par suite de la compression que celle-ci a précédemment subie et de l'élasticité qui tendra à remettre ses molécules à leurs places respectives, une quantité égale à $v - u$, tandis que m' gagnera, au même point de vue, une quantité de vitesse égale à $u - v'$, on aura, en exprimant par V et V' la vitesse de m et m' après la compression :

$$V = u - (v - u) = 2u - v = \frac{(m - m')\,v + 2m'v'}{m + m'};$$

$$V' = u + (u - v') = 2u - v' = \frac{(m' - m)\,v' + 2mv}{m + m'}.$$

Quant au choc oblique des corps, je me dispense de rappeler ici les solutions et les formules qu'on a présentées, qu'on trouvera d'ailleurs dans mes *Discussions sur les principes de la physique*, avec des considérations critiques que j'y ai jointes.

Ces théories ne peuvent s'appliquer aux cas où les deux corps seraient, non pas un composé de parties à distance les unes des autres, mais un seul continu homogène sans

aucune séparation ni division, comme on peut concevoir chacun des éléments dont on suppose que les corps sont formés. Dans l'hypothèse où les deux mobiles qui se rencontrent sont chacun un seul continu, et où, à part le mouvement, la vitesse qui les anime, ils sont libres, ne sont soumis à aucune action autre que celle qu'ils peuvent exercer l'un sur l'autre par le choc qui s'établit entre eux, les effets de ce choc ne peuvent pas dépendre et de leurs vitesses et de leurs masses, comme on l'admet, mais ils devraient dépendre de leurs vitesses et de l'étendue de la portion de surface mise en contact par leur rencontre, leur choc.

En effet, considérons d'abord un corps B (fig. 49) marchant avec une vitesse *v* vers un corps A en repos. Supposons, pour simplifier, que les deux corps soient des cubes égaux en volumes et par conséquent en masses, dans l'hypothèse où je raisonne. Supposons aussi que B, marchant vers A, présente constamment la même face *b* à la face *a* de A, parallèlement et sur une même droite passant par les centres de figures. Partageons maintenant, par la pensée, le corps B en deux parties par le plan *b'* parallèle à la face *b*. Il est visible que le choc de B tout entier sur A n'aura pas plus d'effet que n'en aurait le choc de l'une des deux parties seulement que nous venons d'y concevoir, suivant la direction que j'ai supposée. Dans les deux cas, une même surface *b* ou *b'* viendra frapper une même surface *a* avec une même vitesse *v*. La grosseur de la masse en mouvement ne peut aucunement influer ici. La vitesse du corps choquant et l'étendue de la surface choquée en contact lors du choc, doivent seules contribuer à la détermination de la vitesse que A prend par suite du choc qu'il

reçoit. Pareillement la masse du corps choqué doit être sans influence sur l'effet du choc dans l'hypothèse où je me place, celle où ce corps est un seul continu libre de tout autre action que celle du corps choquant. En concevant le corps A divisé en deux parties par le plan a', par exemple, il est évident que la surface a recevrait exactement le même choc, dans le cas où le corps choqué serait pris tout entier, et dans celui où il serait réduit à l'une des parties, à celle comprise entre les plans a et a', par exemple. Or, dans l'hypothèse, A, étant libre, ne recevant aucune autre action que celle de B, doit obéir, dans son entier, à cette action, exactement comme s'il était réduit à une moitié, à une portion quelconque qui recevrait exactement le même choc.

Dira-t-on que la pression de B sur une portion quelconque de la surface de A doit se répartir dans toute l'étendue de la masse de ce dernier ; qu'ainsi, plus cette masse est grande, moins l'effet de la pression est considérable ? — Je ne saurais admettre une telle répartition, qui est évidemment chimérique. D'ailleurs, ce n'est pas à ce point de vue qu'on se place quand on tient compte des masses pour déterminer la vitesse après le choc, dans le système où l'on professe que deux corps non élastiques qui se rencontrent directement prennent, après le choc, une vitesse commune déterminée par l'équation

$$u = \frac{mv \pm m'v'}{m + m'} ;$$

car, d'après cette formule, quelles que soient les masses des corps, si elles sont égales, et que le corps choqué soit en repos, on a toujours le même résultat

$$u = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2},$$

c'est-à-dire que les deux corps auraient toujours, en ce cas, après le choc, une même vitesse égale à la moitié de celle qui animait le corps choquant.

Dans mes *Discussions sur les principes de la physique*, pour apprécier l'effet du choc entre deux corps supposés formés chacun d'un seul continu, je n'ai tenu compte que de la vitesse, j'ai négligé, à tort, la quantité de surface mise en contact dans le choc. Voici comme je formulais mon opinion dans cette œuvre, page 128 :

« Si A et B se meuvent dans le même sens, il est visible qu'ils ne se rencontreront qu'à la condition que la vitesse de l'un sera plus grande que celle de l'autre. Soit A allant vers B avec une vitesse excédant celle de ce dernier, B recevra le choc, et comme on ne doit pas ici tenir compte des masses des mobiles, et qu'il n'y a pas d'élasticité, il arrivera seulement que B acquerra une certaine quantité de vitesse que lui communiquera A, qui ne perdra rien de la sienne, et ne l'accroîtra point.

» A, en effet, ne peut se trouver aucunement empêché par B, qui, allant dans le même sens, ne lui offre pas de résistance ; A ne saurait non plus gagner aucune vitesse, mais il entraîne B dans son mouvement ; il ne cesse pas de toucher B après le choc : les deux corps ont donc alors un mouvement semblable à celui qui animait A avant le choc.

» Soient maintenant A et B allant l'un vers l'autre : s'ils se meuvent ainsi avec la même vitesse, quelles que soient leurs masses respectives, le choc les constituera en équilibre ; ils resteront en repos après le choc.

» Si leur vitesse est inégale, si A, par exemple, va plus vite que B, A, par la résistance de B, au moment du choc, perdra une partie de sa vitesse. Si j'exprime par v la vitesse de A, par v' celle de B, A, après le choc aura une vitesse égale à $v - v'$. B, de son côté, perdra toute la vitesse qu'il avait vers A avant le choc, et gagnera, dans le sens opposé, c'est-à-dire dans la direction du mouvement de A, une vitesse égale à celle qui restera à A après le choc; car, à défaut d'élasticité, les deux corps devront se mouvoir dans le même sens avec une égale vitesse. La vitesse commune des deux corps après le choc sera donc exprimée par $v - v'$. »

Or, cette doctrine est fautive. Premièrement, si je suppose que la vitesse prise par le corps choqué en repos est égale à celle du corps choquant, quelle que soit l'étendue de surface en contact dans le choc, je suis conduit à une conséquence inadmissible, absurde. En effet, supposons qu'un même corps A en repos (fig. 50) reçoive à la fois le choc de deux corps B et C, marchant dans le même sens parallèlement entre eux avec une égale vitesse v, et venant frapper A en deux parties de sa surface distantes l'une de l'autre. Il est évident que les effets de ces deux chocs devront s'ajouter. Si donc on supposait qu'au lieu du choc des deux corps B et C, le corps A reçoit le choc d'un seul corps à la fois, non-seulement sur les parties de sa surface choquées par B et C, mais encore sur la partie intermédiaire de sa surface, il faudrait ou renoncer à admettre que, dans tous les cas, la vitesse prise par le corps choqué est égale à celle du corps choquant, ou accepter cette absurde conséquence, que le corps A, dans le cas où il recevrait le choc de deux corps séparés, prendrait une vitesse plus

grande que celle qu'il prendrait s'il ne recevait que le choc d'un seul corps, bien que, dans ce dernier cas, le corps unique heurterait à la fois, dans le même sens et avec une vitesse égale à celle des deux corps séparés B et C, et les parties de surface frappées par les deux corps séparés et la portion de surface comprise entre ces deux parties.

Ainsi, dans mon hypothèse, la vitesse imprimée à un corps par le choc d'un autre corps devrait être plus ou moins grande suivant la quantité de surface en contact dans le choc ; mais elle devrait aussi être proportionnelle à la vitesse du corps choquant.

Le corps choqué pourrait donc prendre une vitesse plus grande, bien plus grande que celle qui animerait le corps choquant avant la rencontre de ces corps.

On pourrait, en ce cas, émettre le principe suivant : *Si un corps supposé d'une seule masse continue et homogène choque un corps en repos, aussi d'un seul continu, la vitesse que prend celui-ci par le choc doit être proportionnelle à la vitesse du corps choquant et à la quantité de surface mise en contact par le choc*. Si, par exemple, un corps A, tel que je le suppose, par le choc d'un autre corps B animé d'une certaine vitesse v, sur une certaine portion très-petite s de sa surface, prenait une vitesse égale à v, le corps A prendrait une vitesse double de v, s'il recevait sur une même portion de surface le choc d'un corps ayant une vitesse égale à $2v$, ou si, recevant le choc d'un corps ayant une vitesse égale à v seulement, sa portion de surface en contact dans le choc était égale à $2s$.

Il ne serait pas, d'ailleurs, inadmissible que le corps choqué prît une vitesse supérieure à celle du corps cho-

quant avant la rencontre, ainsi que je viens de le dire. Ce ne serait pas le seul cas où l'on pourrait supposer qu'un corps produit dans un autre un mouvement plus grand que celui dont il est animé. On admet généralement l'attraction des corps les uns sur les autres ; or, si l'attraction était supposée possible, on pourrait bien aussi supposer, sans déraison, qu'un corps en repos attire et fait ainsi mouvoir un autre corps sans être lui-même en mouvement, sans être mu par une cause quelconque, même par le corps attiré ; car la raison, à part toute expérience, ne dit pas que l'attraction des corps doit être mutuelle ; elle dit, d'ailleurs, que, si les corps sont formés de substances différentes, et qu'ils s'attirent, ils ne doivent pas s'attirer de la même manière, au même degré, à masses égales.

Si le corps choqué considéré était en mouvement avant le choc, sa vitesse après le choc serait égale à la somme ou à la différence de sa vitesse acquise par le choc, comme s'il était en repos, et de sa vitesse précédente, selon que les deux corps, que je suppose animés de vitesses inégales, iraient ou n'iraient pas dans le même sens. S'ils se rencontraient en sens contraire, avec une égale vitesse, ils resteraient en repos après le choc : quelle que fût la différence de leurs masses, ils devraient annuler mutuellement leur action (1).

On voit que, dans l'hypothèse, le principe d'égalité de l'action et de la réaction ne serait point respecté, mais je ne puis regarder ce principe comme absolu.

A la vérité, dans ce système, il n'y aurait pas moyen de déterminer rationnellement la vitesse que devrait

(1) Si les deux corps étaient de même nature, ils devraient, après le choc, ne former qu'un seul corps en repos ou animé d'un même mouvement, égal au plus grand de ceux qui les animeraient, aussi après le choc, s'ils différaient par leur nature.

prendre le corps choqué. En effet, plus on diviserait, par la pensée, la surface de contact des deux corps, c'est-à-dire plus on y concevrait de parties, plus aussi devrait être grande la vitesse imprimée au corps choqué Mais, si petites que fussent les parties conçues dans la surface de contact, on pourrait y concevoir des parties plus petites encore; il n'y aurait donc pas de limite, pas de détermination rationnelle possible de la vitesse, de son accroissement ou de sa diminution. Cette irrationalité est de la nature de celles que j'ai signalées et qui sont relatives à la détermination des effets d'une action permanente, comme le serait l'attraction d'un corps sur un autre. L'on ne peut supposer, en ce cas, que le corps attiré a une vitesse *continûment* accélérée ; il faudrait admettre que sa vitesse ne change que d'instant en instant, qu'elle reste successivement la même pendant un certain temps, si court qu'il soit, et la fixation de cette durée serait arbitraire. De même il ne serait pas rationnel de penser que la surface de contact entre deux corps se compose d'une infinité de points inétendus, indivisibles, et en y supposant des points étendus, on n'aurait aucune base pour fixer l'étendue de ces points, leur nombre, la part de chacun dans l'action totale, dans l'effet total.

Au reste, je ne vois pas d'utilité réelle, pratique, à déterminer l'effet du choc des corps, dans l'hypothèse où ils ne seraient que des touts continus sans aucune division de parties, hypothèse qui ne se concilie point avec les phénomènes apparents de la nature, qui impliquent, au contraire, que les corps sont formés de molécules tenues à des distances plus ou moins grandes les unes des autres. Il est vrai que ces molécules semblent devoir parfois se choquer; qu'en supposant même qu'elle ne soient ja-

mais en contact immédiat, que les chocs réels n'aient lieu qu'entre des molécules dites pondérables, d'une part, et des particules d'un fluide éthéré, il y a lieu encore de se demander quels peuvent être les effets des chocs moléculaires ou particulaires; sous ce rapport, l'impossibilité rationnelle dont il s'agit persiste, car si petites, si infimes que nous supposions les molécules pondérables ou les particules de l'éther, elles ne peuvent être indivisibles.

Quoi qu'il en soit, je ne saurais regarder comme certaines, comme exactes, les solutions admises pour déterminer les effets des chocs entre les corps élastiques. Je conteste et vais discuter successivement deux principes sur lesquels elles sont principalement fondées. Je m'occupe d'abord du principe d'égalité de l'action et de la réaction.

Newton qui, paraît-il, l'a énoncé le premier, la formulé ainsi (*Principia mathematica*, loi III) : *La réaction est toujours contraire et égale à l'action; c'est-à-dire que les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales et directement opposées.*

« Tout corps, dit-il, qui presse ou tire un autre corps, est également pressé ou tiré par celui-ci. Si quelqu'un presse avec le doigt une pierre, son doigt est également pressé par la pierre. Si un cheval tire une pierre attachée par une corde, ce cheval est également tiré, pour ainsi dire, vers la pierre; car la corde, alors partout distendue, par l'effort qu'elle fait pour se relâcher, tend à porter le cheval vers la pierre et la pierre vers le cheval, et elle empêche autant l'un d'avancer qu'elle sollicite la marche de l'autre. Si quelque corps, heurtant un autre corps, change le mouvement de celui-ci par sa force quelconque, lui-même (à cause de l'égalité de leur pression

mutuelle) subira, dans son propre mouvement, un changement égal à celui de l'autre et en sens contraire. Par ces actions, il se produit des changements égaux, *non de vitesses*, mais de mouvements, dans les corps qui ne sont pas soumis à d'autres empêchements ; car les changements de vitesses opérées en sens contraires, les mouvements étant également changés, sont réciproquement proportionnels aux masses. Cette loi s'applique aussi aux attractions, comme le prouve une prochaine scolie. »

Voici comment M. Daguin, dans son très-estimable *Traité de physique,* t, I, p. 67, expose le principe dont il s'agit :

« Quand un corps, soumis à l'action d'une force, agit sur un autre, ce dernier réagit, dans un sens directement opposé, sur le premier et avec la même intensité. Ce résultat a lieu dans l'état de mouvement aussi bien que dans l'état d'équilibre. Ainsi, un cheval qui fait monter un poids de 100 kil. en tirant une corde qui passe sur une poulie, exerce un effort égal seulement à 100 kil. (en négligeant le frottement de la poulie) comme s'il ne faisait que soutenir le poids sans l'élever. Si la corde est attachée à un obstacle fixe, ce dernier, par sa résistance, représente, en sens opposé, l'effort exercé. Si le cheval est placé dans un bateau auquel la corde est attachée, il ne produira aucun déplacement du bateau, parce que l'effort qu'il exerce sur son collier est contrebalancé par celui, de sens contraire, qu'il exerce avec ses pieds sur le plancher du bateau, pour s'opposer à la force de réaction qui tend à l'entraîner en arrière. Si un aimant attire un morceau de fer, ce dernier agit de la même manière sur l'aimant, et avec la même force.... »

Ces allégations et ces considérations ne prouvent point le principe.

Dans l'exemple du cheval attaché dans un bateau, il n'y a pas d'effet produit, du moins d'effet sensible sur le mouvement du bateau : je conçois que, dans ce cas, on regarde la réaction comme égale à l'action ; mais il n'en est pas ainsi dans l'exemple d'un cheval qui fait monter un poids de 100 kil. en tirant une corde passant sur une poulie. Au lieu du cheval, mettez un autre poids de 100 kil., et les deux poids se feront équilibre ; leur action sera égale : alors ils ne feront que se soutenir mutuellement. Mais le cheval fait plus, il fait monter le poids de 100 kil.

Dans cet exemple, comme dans celui du cheval qui tire par une corde une pierre, un fardeau quelconque, la corde est tendue, sa tension est partout sensiblement la même ; soit : s'ensuit-il que le fardeau agit autant sur le cheval que cet animal sur le fardeau? Non vraiment.

D'abord, que faut-il entendre par la tension d'un fil, d'une corde soumise à une traction ?

Un fil, une corde, quelle que soit leur matière, doivent être considérés comme un assemblage de molécules à distance les unes des autres tendant à se réunir par la force dite de cohésion, mais empêchées de le faire par une force contraire dite de répulsion. Soient deux corps m, m' attachés chacun à une extrémité d'un fil ainsi constitué et homogène. Supposons que le corps m soit, en somme, animé d'une force P, et le corps m' d'une force P', et que ces forces tirent ces corps et par conséquent le fil qui les unit, suivant la direction m, m' et en sens contraires. Les molécules du fil, sollicitées en sens op-

posés seront plus ou moins distancées les unes des autres, à commencer par les plus près des points extrêmes adhérents aux corps moteurs. Si les forces P et P′ sont égales, l'écart des molécules du fil se fera également des deux côtés. Si P et P′ sont inégales, si l'on a, par exemple, $P > P'$, l'écart se fera tout d'abord plus du côté de P que du côté de P′; mais, à cause de la cohésion, de la nature des forces moléculaires, les molécules du fil, surtout s'il est élastique, se distanceront à très-peu près également les unes des autres dans toute l'étendue du fil.

Dans cet état, le fil sera allongé, *tendu,* raidi par la *tension ;* mais bien qu'alors ses molécules se trouvent sensiblement à une même distance les unes des autres dans toute sa longueur, les deux corps, animés de forces égales P et P′, n'auront pas contribué également à son allongement, à sa tension, et je ne vois point qu'ils aient dû en éprouver une perte égale de mouvement, de quantité de mouvement.

D'ailleurs, dans les problèmes de ce genre, on suppose que le fil est inextensible; or, dans cette hypothèse, il n'y a pas de tension. Le fil devant garder exactement sa longueur, sa forme, il ne peut qu'être mu plus ou moins par la résultante des forces contraires qui le tirent.

La tension du fil, telle qu'on la conçoit, est fausse. On l'a précisée, en disant qu'elle est égale à l'une des deux forces égales et contraires qu'il faudrait appliquer aux corps *m*, *m′*, pour remplacer le fil qui les unit. Mais, en concevant la tension telle que je viens de l'expliquer, on peut supposer qu'il faudrait que des forces *inégales* fussent appliquées à ces corps en sens contraires,

pour remplacer le fil, c'est-à-dire pour que, le fil étant supprimé, ils eussent le même mouvement commun qu'ils prennent lorsqu'ils sont liés entre eux par le fil.

Revenons à l'exemple du cheval et supposons la réaction égale à l'action. Représentons par u la vitesse commune du cheval, de la corde et du poids; par m et m', la masse du poids et celle du cheval; par v la vitesse qu'aurait le cheval, si son mouvement n'était pas ralenti par le poids, et par v' la vitesse qu'aurait le poids dans sa chute, s'il était abandonné à lui-même.

La vitesse perdue par le cheval sera exprimée par $v - u$. Quant au poids, par l'action du cheval, il perdra d'abord la vitesse qu'il avait dans un sens contraire au sens de la vitesse du cheval, et il prendra en outre la vitesse commune u; sa perte de vitesse doit donc être exprimée algébriquement par $u + v'$. Or, d'après le principe que je combats, les quantités de mouvement perdues devraient se faire équilibre, et l'on aurait ainsi :

$$m(v - u) = m'(u + v')$$

d'où

$$u = \frac{mv - m'v'}{m + m'}.$$

Supposons maintenant que l'on ait $m = m'$, c'est-à-dire que la masse du poids soit égale à celle du cheval, la valeur de u sera réduite à $\frac{v - v'}{2}$.

En sorte que, dans ce cas, la vitesse commune serait égale seulement à la moitié de la différence des vitesses qu'auraient le poids et le cheval en sens contraires, s'ils

étaient libres. Or, si cette formule est vraie, elle devra s'appliquer à tous les cas où deux corps de masse égale, liés entre eux par une corde, se tireront en sens contraires, tendront à retarder leur marche. Supposez la vitesse v de m extrêmement grande, et v' la vitesse de m' extrêmement petite, la vitesse v, d'après la formule $\frac{v - v'}{2}$ serait, alors même, diminuée de très-près de la moitié. Si v' était nulle, c'est-à-dire si la masse m' était en repos, la vitesse de m, dans l'hypothèse, serait juste la moitié de v, c'est-à-dire serait réduite de moitié, quelle qu'eût été sa grandeur à l'état de liberté. Je ne crois point qu'un tel résultat soit admissible, qu'on puisse invoquer l'expérience pour le justifier.

Dans le cas de deux poids inégaux tirant chacun une extrémité d'une corde supposée inextensible et portant sur une poulie dont l'axe est supposé fixe, le poids le plus fort doit entraîner l'autre, de sorte que les deux poids prennent une vitesse commune u. Si, pour déterminer, u, on applique ici le principe d'égalité de l'action et de la réaction, on trouve $u = g\left[\frac{m - m'}{m + m'}\right]$, ou g exprime la pesanteur, et m, m' représentent les masses des poids. En effet, dans l'hypothèse, les deux poids devant perdre une égale quantité de mouvement, et la vitesse perdue par le fort poids étant $u - g$, tandis que celle perdue par l'autre est $u + g$, on aurait

$$m(u - g) = m'(u + g)$$

d'où

$$u = \frac{mg - m'g'}{m + m'} = g\left[\frac{m - m'}{m + m'}\right].$$

Or ce résultat est contestable. Si au lieu de la seule et même vitesse g qui, dans l'exemple, anime les corps m, m', ces corps ont des vitesses v, v' inégales, v, vitesse de m, étant plus grande que v', vitesse de m', d'après le même principe d'égalité de l'action et de la réaction, la vitesse commune résultante sera ici

$$u = \frac{mv - m'v'}{m + m'};$$

de sorte que si les masses m et m' étaient égales, il viendrait

$$u = \frac{v - v'}{2};$$

et si la masse m' était supposée en repos, la vitesse commune résultant de la traction exercée par m animée de la vitesse v, serait exactement égale à $\frac{v}{2}$, c'est-à-dire à la moitié de celle de m, quelle que fût cette vitesse v ; résultat que je ne puis admettre théoriquement : il est rationnel de penser que la vitesse v pourrait être tellement grande, qu'elle ne dût être que très-peu diminuée relativement par la simple inertie de la masse m' égale à m. Or, si le principe d'égalité de l'action et de la réaction ne peut justement s'appliquer alors, comment assurer qu'il reçoit une application parfaitement exacte dans le cas réel où les corps suspendus sont seulement mus par la pesanteur, et sont ainsi animés d'une même vitesse g. Considérons, d'ailleurs, que, dans les expériences, il y a des causes d'erreurs, des influences dont on ne peut

tenir un compte exact. Ainsi non-seulement le cordon auquel sont attachés les poids, et qu'on suppose inextensible, ne l'est point absolument; mais encore ce cordon, pressant sur la poulie, n'est pas complétement libre; il subit des frottements qui gênent, ralentissent son mouvement.

Il y a un problème consistant à déterminer la vitesse que doit prendre un système de poids reposant sur un plan fixe horizontal, distants les uns des autres, mais reliés entre eux par un cordon supposé inextensible, débordant le plan et tiré verticalement par un poids. On le résout en considérant les poids comme libres et n'opposant que leur inertie à l'action du poids qui les tire; par le principe d'égalité de l'action et de la réaction, en appelant M la somme des masses des poids reposant sur le plan, m la masse du poids qui les tire, g la pesanteur, on trouvera, pour la vitesse imprimée au système,

$$u = \frac{mg}{M + m};$$

résultat que je conteste du moins au point de vue théorique.

En réalité, la force tendant à retenir les corps en repos sur le plan, et conséquemment à diminuer l'effet de l'action de mg, ne doit pas être seulement l'inertie, mais encore leur poids qui influe ici, du moins jusqu'à un certain point. Il serait difficile de déterminer cette force; car le poids des corps reposant sur le plan est sans doute atténué par la répulsion du fluide intermoléculaire, comme je l'ai expliqué précédemment. Si, malgré la composante normale qui résulte du poids de ces corps, ils peuvent marcher sur le plan, c'est que ce

plan supposé fixe, inflexible, immuable, ne l'est point. Ce même plan étant comprimé par la force normale, ou plutôt par la résultante oblique des forces qui agissent sur les poids qu'il supporte, l'élasticité fait que ces poids peuvent marcher, mais non pas avec une vitesse égale à celle qu'ils auraient s'ils n'étaient pas sous l'influence de leur poids.

On peut dire que le poids moteur dont la masse est m et la vitesse g, perd une force égale à celle qui tend à retenir à leurs places les corps reposant sur le plan; mais quelle est cette force ? quelle est précisément celle du poids moteur, et la vitesse résultante ? C'est ce que la théorie ne me paraît pas pouvoir déterminer exactement, ne détermine point justement dans la formule $u = \frac{mg}{M + m}$.

La solution relative à ce dernier problème serait applicable au cas où un fardeau, par l'intermédiaire d'une corde inextensible, serait traîné, tiré par un cheval, par une force quelconque autre qu'un poids; car les poids placés sur le plan seraient représentés par le fardeau, et le poids moteur mg le serait par le cheval. Si le fardeau était un poids suspendu comme dans l'avant-dernier problème, ce serait ce problème qu'on devrait appliquer, et là, non plus, on ne serait pas fondé à prétendre que le cheval perd autant de quantité de mouvement qu'il en donne au fardeau soumis à sa traction.

Je vais, à présent, montrer que le principe d'égalité de l'action et de la réaction n'est pas mieux justifié en ce qui concerne le choc des corps.

Prenons la question *ab ovo*. 1° Concevons deux corps

a et *b* formés chacun d'une seule molécule continue, et supposons que ces deux molécules aillent l'une vers l'autre avec des vitesses inégales et ne soient soumises d'ailleurs à aucune autre force. Soit v, par exemple, la vitesse de *a*, et v' celle de *b*, et soit $v > v'$. En ce cas, après le choc, les deux corps auront une vitesse égale à $v—v'$.

2° Si *b* est en repos et que *a* ait une vitesse v, les deux corps auront, après le choc, une vitesse qui ne pourra pas être moindre que v.

3° Supposons maintenant que deux corps non élastiques, formés chacun de deux molécules seulement, se rencontrent avec des vitesses inégales. Soient *a* et *a'* les deux molécules de l'un des corps, *b* et *b'* celles de l'autre. Concevons que les molécules *aa'*, *bb'* soient sur une même ligne, qu'elles se rencontrent ainsi en allant en sens contraires, comme l'indiquent les flèches (fig. 51), et que *aa'* aient une vitesse v bien plus grande que la vitesse v' de *bb'*. Ici, comme il y a deux molécules qui se soutiennent mutuellement dans chaque corps, il y aura, sous ce rapport, accroissement de la résistance opposée par les deux corps réciproquement; mais cet accroissement de résistance sera faible, puisque, si chaque molécule était seule, elle n'opposerait aucune résistance de ce genre, elle serait réduite à la résistance de sa propre impulsion. On peut donc supposer que *aa'* soient animées d'une assez grande vitesse relativement à celle contraire de *bb'*, pour que l'atténuation que subira la vitesse v par l'effet du choc soit, en somme, relativement très-faible, et qu'après le choc, les quatre molécules aient une vitesse à peu près égale à $v — v'$, une vitesse bien plus grande que celle

donnée par la formule $\frac{mv - m'v'}{m+m'}$, où m et m' sont les masses animées des vitesses v et v', directement opposées ; car, d'après cette formule, en faisant $m=m'$, l'on n'aurait, pour la vitesse après le choc, que $\frac{v-v'}{2}$.

4° Si, aa' ayant la même vitesse v, bb' étaient en repos, la vitesse commune après le choc serait, dans le même cas, plus près d'égaler v, puisque bb' en repos résisteraient encore moins à aa' que si elles avaient un mouvement en sens contraire. Il n'y aurait pas non plus lieu alors d'appliquer la formule $\frac{mv - m'v'}{m+m'}$ qui, en ce cas, ne donnerait, pour la vitesse commune après le choc, que $\frac{v}{2}$.

5° Si les deux corps étaient formés chacun de trois molécules, $aa'a''$, $bb'b''$, animées, les premières d'une vitesse v, et les dernières d'une vitesse v' moindre et de sens contraire, la résistance de $bb'b''$, toutes choses d'ailleurs égales, serait un peu plus grande que celle qu'offrirait bb', dans le troisième exemple ; mais elle serait encore bien peu notable. D'ailleurs, par l'accroissement de sa masse, le corps animé de la vitesse v ferait, de son côté, une plus grande résistance au corps ayant la vitesse v', ce qui tendrait à diminuer l'effet de la réaction de ce dernier. Admettons, toutefois, qu'en somme, le corps $bb'b''$ tende plus à diminuer la vitesse de $aa'a''$, que bb' ne tendrait à diminuer la vitesse de aa', dans le troisième exemple. Il est visible que v pourra être prise assez grande et v' assez petite pour que la vitesse commune après le choc soit bien plus grande que celle ré-

sultant de la formule $\frac{mv - m'v'}{m+m'}$ qui, dans ce cas, ne donnerait que $\frac{v-v'}{2}$.

6° En augmentant successivement, par la pensée, le nombre des molécules comprises dans chacun des deux corps supposés toujours égaux en masses, formés d'un même nombre de molécules semblables, on augmenterait de même la résistance, toutes choses d'ailleurs égales ; mais, quelles que fussent alors les deux masses, on pourrait toujours prendre v assez grande et v' assez petite pour que la vitesse commune après le choc excédât autant qu'on le voudrait la vitesse donnée par l'expression $\frac{mv - m'v'}{m+m'}$.

7° Si, les vitesses opposées v, v' étant égales ou inégales, les masses m, m' étaient inégales, il serait supposable que l'action de chaque corps fût en proportion de sa masse multipliée par sa vitesse ; mais cela ne serait pas nécessaire, pourrait ne pas être, et, même en l'admettant, il ne s'ensuivrait pas que la vitesse commune après le choc dût être égale à $\frac{mv - m'v'}{m+m'}$.

Quelle que soit l'inégalité des masses, leur rapport, il est admissible que la vitesse v pourrait être tellement grande relativement à v', que la vitesse après le choc fût bien plus grande que ne le suppose le principe d'égalité de l'action et de la réaction.

Dans ces exemples, j'ai supposé que les deux corps vont l'un vers l'autre. Dans les cas où ils se rencontreraient en allant dans le même sens, en leur appliquant

des raisonnements analogues à ceux que je viens de présenter, on verrait qu'il se pourrait que la vitesse commune après le choc fût à peu près égale à $v + v'$, v étant la plus grande et v' la plus petite des deux vitesses animant respectivement les deux mobiles avant le choc. Quelles que fussent les masses respectives de ces mobiles, on pourrait supposer v assez grande pour que la vitesse après le choc dût excéder celle que donnerait l'application du principe que je discute, c'est-à-dire l'application de la formule $\frac{mv + m'v'}{m + m'}$.

Dans tous les cas, au contraire, v pourrait être assez petite pour que la vitesse après le choc fût moins grande que celle qui serait donnée par les formules.

Ainsi, les effets des chocs des corps peuvent varier considérablement suivant les cas, suivant les conditions de masses et de vitesses, et, dans ces variations, ils peuvent s'écarter ou se rapprocher des formules admises par la théorie.

Il se peut que l'on puisse, sans erreur sensible, considérer généralement la réaction comme égale à l'action, dans les phénomènes que nous pouvons examiner, juger sous ce rapport, et où figurent des masses et des vitesses relativement très-restreintes; mais il est permis de penser que l'action et la réaction pourraient être très-inégales, si les corps opérant les uns sur les autres présentaient de bien plus grandes inégalités de masses et de vitesses que ceux que nous pouvons considérer dans nos observations et nos expériences. Je conçois donc que, dans l'appréciation des phénomènes terrestres, nous regardions, en général, les réactions comme égales aux actions correspondantes ; mais on peut bien

le faire pratiquement, sans ériger cette égalité en principe absolu.

Au reste, je montrerai, dans la suite de ce traité, quand je parlerai du pendule, qu'on ne peut considérer comme exactes et concluantes les expériences qui ont paru vérifier le principe d'égalité de l'action et de la réaction dans son application au choc des corps.

Considérons aussi que les actions et réactions des corps, dans leurs chocs notamment, doivent varier en raison non-seulement de leur masse, mais encore de leur constitution intime, de leur forme et du milieu ambiant.

La raison ne dit point que la réaction doit être égale à l'action. Je conçois aisément que des corps qui s'attirent, par exemple, ne s'attirent pas également ; car si leurs substances sont essentiellement différentes, ils ne doivent pas agir pareillement l'un sur l'autre. Or il est bien plausible qu'il y a, dans la nature, des substances essentiellement différentes ; les inégalités qu'offrent les affinités chimiques et divers phénomènes de la physique me paraissent inexplicables dans l'hypothèse où tous les corps ne seraient que divers états d'une même substance. (Voir, à ce sujet, mes *Discussions sur les principes de la physique.*)

Il est un autre principe qui est dû à d'Alembert et qu'on a honoré du titre de *Principe général de la dynamique.* Que vaut ce principe, dont on a fait de si fréquentes et si importantes applications ?

Voici comment il a été présenté par d'Alembert lui-même (chap. Ier, p. 50) :

« Problème général.

» Soit donné un système de corps disposés les uns par rapport aux autres d'une manière quelconque ; et

supposons qu'on imprime à chacun de ces corps un mouvement particulier, qu'il ne puisse suivre à cause de l'action des autres corps : trouver le mouvement que chaque corps doit prendre.

» Solution :

» Soient A, B, C, etc., les corps qui composent le système, et supposons qu'on leur ait imprimé les mouvements *a, b, c*, etc., qu'ils soient forcés, à cause de leur action mutuelle, de changer dans les mouvements a, b, c, etc. Il est clair qu'on peut regarder le mouvement *a* imprimé au corps A comme composé du mouvement a qu'il a pris, et d'un autre mouvement α; qu'on peut de même regarder les mouvements *b, c*, etc.; comme composés de mouvements b, β; c, κ; etc.; d'où il s'ensuit que le mouvement des corps A, B, C, etc., entre eux aurait été le même, si, au lieu de leur donner les impulsions *a, b, c*, on leur eût donné à la fois les doubles impulsions a, α; b, β; c, κ; etc. Or, par la supposition, les corps A, B, C, etc., ont pris d'eux-mêmes les mouvements a, b, c, etc. Donc les mouvements α, β, κ, etc., doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les mouvements a, b, c, etc., c'est-à-dire que, si les corps n'avaient reçu que les mouvements α, β, κ, etc., ces mouvements auraient dû se détruire mutuellement, et le système demeurer en repos.

» De là résulte le principe suivant, pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres. *Décomposez les mouvements* a, b, c, etc., *imprimés à chaque corps, chacun en deux autres* a, α; b, β; c, κ, etc., *qui soient tels que, si l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvements* a, b, c, etc., *ils eussent pu conserver ces mouvements sans se nuire réciproquement; et*

que, si on ne leur eût imprimé que les mouvements α, β, ϰ, etc., *le système fût demeuré en repos ;* il est clair que a, b, c seront les mouvements que ces corps prendront en vertu de leur action. Ce Q. F. *Trouver.* »

Eh bien ! j'ose dire que le grand principe de d'Alembert n'est pas fondé. Je conteste la légitimité de la division qu'il fait ici des mouvements imprimés *a*, *b*, *c*, etc., en mouvements α, β, ϰ, etc., perdus respectivement par les divers corps du système et qui se détruiraient, se feraient équilibre, si les corps n'étaient animés que de ces mêmes mouvements, et en mouvements a, b, c, etc., qui seraient effectifs. D'abord, je nie que, si des corps sont liés entre eux, il puisse leur être imprimé respectivement des mouvements a, b, c, etc., tels que les corps du système conservent ces mêmes mouvements sans altération. Je dis que la liaison des corps doit modifier les mouvements imprimés quelconques. Je dis que les mouvements effectifs que prennent respectivement les corps du système résultent à la fois de tous les mouvements, de la totalité des mouvements imprimés et de la liaison existante entre ces corps. De plus, et conséquemment, je prétends que les mouvements d'un système peuvent être perdus sans se faire équilibre.

Des corps, des points matériels distincts, séparés, ne peuvent être liés entre eux d'une manière absolue, de telle sorte que des forces quelconques appliquées à ces corps, à ces points matériels, ne puissent faire varier leur position relative. Si, néanmoins, nous nous plaçons dans cette hypothèse, les forces appliquées à ces corps ou points matériels devront agir sur le système exactement comme si elles étaient appliquées à un seul corps continu sans aucune division de parties. Rai-

sonnons dans cette hypothèse, et prenons d'abord le cas le plus simple, celui de deux points matériels ou molécules simples ainsi liés entre eux. Soient, par exemple (fig. 52), m et m' ces deux points. Appliquons à m la force P et à m' la force P', dans la direction de la ligne mm'. Ou bien les deux forces seront de même sens, ou elles seront de sens contraires. — Dans le premier cas, elles ajouteront leur action, il n'y aura pas de force perdue. Le système mm' marchera avec une vitesse égale à $v + v'$, v représentant la vitesse que P seule imprimerait, et v' celle qu'imprimerait P'. La liaison invariable aura donc pour effet d'accroître la vitesse de chacune des molécules m et m', et de les accroître inégalement, P et P' étant supposées inégales, puisque la vitesse v de m sera augmentée de la vitesse v' de m', et réciproquement celle de v' de m' sera accrue de la vitesse v de m. — Dans l'autre cas, si $P = P'$, le système restera en repos, les deux forces P, P' se feront équilibre et seront perdues. Soit $P > P'$, le système prendra une vitesse $u = v - v'$, m perdra donc une vitesse égale à v'; m' perdra sa vitesse v', et de plus elle prendra une vitesse u de sens contraire à celui de v'; elle perdra donc en tout une vitesse égale à $u + v' = v$. Les vitesses perdues, en ce cas, ne se feront donc pas équilibre. Dans le même cas, d'ailleurs, m' pourra gagner en vitesse *absolue*, et gagner plus ou moins que m ne perdra. En effet, sa vitesse absolue sera $v - v' = u$, et l'on pourra avoir $u > v'$, ou $u < v'$; or v' est la vitesse perdue par m.

Il est aisé de démontrer que dans tous les cas où deux points liés invariablement entre eux seraient soumis à des forces égales ou inégales, mais diversement dirigées, c'est-à-dire ne s'exerçant pas suivant une même droite,

ou suivant deux droites parallèles, les forces ou vitesses perdues ne sauraient se faire équilibre. Soient (fig. 53) m et m' les deux points considérés, P et P' des forces respectivement appliquées à ces points et représentées par les droites mP, m'P' : à cause de la liaison, supposée absolue, des points d'application m, m', ils devront prendre un même mouvement qu'on déterminera en portant parallèlement à elles-mêmes en un même point les forces P, P'; soit O ce point (même figure). Nous voyons, par le parallélogramme des forces, que P et P' ont une résultante représentée par OS qui représentera aussi la vitesse effective du système m, m' et conséquemment de chacun des points m et m'. Maintenant, en considérant OS, force ou vitesse effective, comme une composante de chacune des forces P, P', on trouvera, pour autre composante de P, la droite OR, et pour autre composante de P', la droite OR', qui représenteront les forces ou vitesses perdues par m et m', par suite de la liaison de ces points. Or, d'après cela, il est visible que, contrairement au principe de d'Alembert, les forces ou vitesses perdues, dans ce cas, ne se font pas équilibre; car, dans l'exemple, OR, OR' qui les représentent, ne sont pas sur une même ligne, et elles sont d'ailleurs d'inégale grandeur, puisqu'on a ici

$$OR = OP' \text{ et } OP' > OR'.$$

Si nous considérons maintenant un nombre quelconque de points absolument liés entre eux et animés de forces P, P', P'', etc., égales ou inégales, mais dirigées diversement, et telles que, par leurs directions et leurs intensités, elles ne se fassent pas équilibre dans leur état de liaison, nous reconnaîtrons aisément, en transportant

ces forces parallèlement à elles-mêmes en un même point O, en déterminant leur résultante totale et effective OS, puis en les décomposant en cette résultante commune et en des droites OR, OR′, OR″, etc., nous reconnaîtrons, dis-je, que les forces ou vitesses perdues ne se font pas équilibre. On peut s'en convaincre par l'examen des figures 54 et 55, qui représentent les résultats, la première pour un système de trois points, et la seconde pour un système de quatre points. On y verra clairement que les forces ou vitesses perdues représentées par les droites OR, OR′, OR″, etc., ne peuvent point se faire équilibre. On remarquera que, dans ces exemples, les forces perdues se trouvent dirigées d'un même côté d'une droite qui serait supposée passer par le point O de leur application, ce qui exclut absolument la possibilité qu'il y ait équilibre entre elles. D'ailleurs, en donnant des valeurs déterminées aux droites et aux angles qui figurent dans l'opération, on pourrait se convaincre, par le calcul, que l'équilibre en question n'a pas lieu.

Il est visible, par les raisonnements et les exemples que j'ai présentés, que cette impossibilité d'équilibre entre les forces perdues se produirait dans le cas d'un système comprenant un nombre quelconque de points. Evidemment, les forces ou vitesses perdues ne pourraient se faire équilibre que dans les cas où les forces totales données se feraient équilibre elles-mêmes, c'est-à-dire dans les cas seulement où toutes les forces seraient perdues par l'effet de la liaison. Ainsi, on le voit, les forces perdues ne le sont pas, généralement du moins, en ce sens qu'on puisse les supprimer, sans changement; elles jouent un rôle, elles ont une part d'action sur le système.

Sans qu'il y ait cette liaison absolue que j'ai supposée, dans ces cas, entre les points auxquels des forces sont appliquées, ils peuvent être tous plus ou moins sous l'influence de ces forces, de telle sorte qu'il y ait, par suite de leur liaison, changement dans l'intensité et la direction des vitesses qu'ils auraient si, animés des mêmes forces, ils n'étaient aucunement liés entre eux. Tel est le cas de la cohésion des molécules des corps solides, relativement aux forces qui seraient appliquées à ces molécules. On peut aussi comprendre dans cette catégorie de liaisons non absolues les cas où des points seraient liés entre eux par des cordons flexibles.

Il est visible, sous divers rapports, et notamment par les explications et les démonstrations que j'ai apportées, en ce qui concerne les effets des liaisons absolues, que le principe de d'Alembert, à divers egards, ne pourrait pas s'appliquer justement aux autres sortes de liaisons possibles. Je reviendrai sur ce point.

Le principe général de dynamique que je critique a été présenté sous des formes plus ou moins différentes de celle que lui a donnée d'Alembert.

Poisson, dans son *Traité de mécanique* (1re édition, t. II, p. 42), au sujet du principe en question, s'exprime ainsi :

« Considérons un système de points matériels, liés entre eux d'une manière quelconque, et dont les masses soient m, m', m'', etc. ; supposons qu'on applique à ces mobiles des forces qui imprimeraient la vitesse v à la masse m, la vitesse v' à la masse m', la vitesse v'' à la masse m'', etc., si chacune de ces masses était isolée ; en vertu de la liaison des points du système, les vitesses v, v', v'', etc.,

seront altérées dans leurs grandeurs et dans leurs directions ; or, si l'on désigne par u, u', u'', etc., les vitesses inconnues, que les masses m, m', m'', etc., prendront, suivant des directions également inconnues, et si l'on appelle p, p', p'', etc., les vitesses qui seront perdues ou gagnées par ces mêmes masses, de manière que u et p soient les composantes de v, u' et p', celles de v', u'' et p'', celles de v'', etc., je dis *qu'il y aura équilibre dans le système, entre les quantités de mouvement perdues ou gagnées* mp, m'p', m''p'', etc. ; car si ces forces ne se faisaient pas équilibre, u, u', u'', etc., ne seraient plus les vitesses qui ont effectivement lieu ; ce qui serait contre l'hypothèse.

» Ce principe a également lieu, soit que v, v', v'', etc., soient des vitesses finies, acquises par les mobiles pendant un temps fini, ou dues à des forces qui agissent instantanément sur les corps, soit que ces quantités représentent des vitesses infiniment petites, dues à des forces accélératrices ; soit enfin que ces vitesses soient en parties finies et en parties infiniment petites. Nous allons montrer, par des exemples, comment on en fait usage, pour résoudre les questions de dynamique ; mais auparavant, il est bon de changer l'énoncé de ce principe, et de lui donner une forme qui sera plus commode dans un grand nombre d'applications.

» Il est permis de substituer aux formes mp, $m'p'$, $m''p''$, etc., qui doivent se faire équilibre, les composantes de chacune d'elles ; or, la force mp, par exemple, est la résultante de la force mv, prise dans sa direction, et de la force mu, prise en sens contraire de sa direction ; et de même pour les autres ; le principe de d'Alembert revient donc à dire qu'*il y a équilibre dans le système,*

entre les quantités de mouvement mv, m'v', m''v'', *etc., imprimées aux mobiles, et les quantités de mouvement* mu, m'u', m''u'', *etc., qui ont effectivement lieu, chacune de ces dernières étant prise en sens contraire de sa direction.*

» L'avantage de ce second énoncé est de ne pas exiger que l'on considère les vitesses perdues ou gagnées p, p', p'', etc., et d'établir directement les équations d'équilibre entre les vitesses données v, v', v'', etc., et les vitesses inconnues u, u', u'', etc.; que ces équations serviront à déterminer. »

M. Sturm, dans son *Traité de Mécanique à l'usage de l'Ecole polytechnique*, t. II, p. 94, présente le principe de la manière suivante :

« Considérons un système de points en mouvement M, M', M'',... (fig. 56) ; soient m, m', m'',... leurs masses et P, P', P'',... les forces qui les sollicitent. Ces points sont assujettis à certaines conditions, ordinairement exprimées par des équations entre leurs coordonnées.

» Considérons en particulier un de ces points, par exemple, le point M qui est sollicité par la force P. Le mouvement de ce point n'est pas le même que s'il était libre. Soit Q la force qu'il faudrait lui appliquer, s'il était libre, pour lui donner le mouvement qu'il a réellement. Les composantes de la force Q parallèles aux axes,

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\ m\frac{d^2y}{dt^2},\ m\frac{d^2z}{dt^2},$$

sont des fonctions du temps connues ou inconnues, mais déterminées. Soient de même Q', Q'',... les forces qu'il faudrait appliquer aux points M', M'',..., s'ils étaient libres, pour leur conserver le mouvement qu'ils

ont dans le système. On voit que si l'on substitue les forces Q, Q', Q'',... aux forces P, P', P'',..., tous les points prendront le même mouvement qu'auparavant, sans que les mêmes conditions analytiques cessent d'être remplies ; car, puisque leur mouvement est le même dans les deux cas, les équations de conditions seront encore satisfaites. Ainsi, au système des points assujettis aux conditions données et sollicitées par les forces P, P', P'',..., on pourra substituer le système des points assujettis aux mêmes conditions et sollicités par des forces Q, Q', Q''....

» Cela posé, le système étant sollicité par les forces P, P', P'',..., on ne modifiera point son mouvement, si l'on applique respectivement aux points M, M', M''...., les forces égales et directement opposées Q, — Q, Q', — Q'...., qui se font équilibre deux à deux. On vient de voir que, sans qu'on ait à changer les liaisons du système, les forces Q, Q', Q'',... produisent le mouvement effectif. Donc les forces P, P', P''...., — Q, — Q', — Q'',... se font équilibre, puisque le mouvement n'est pas changé par leur suppression. On arrive donc ainsi au principe qui porte le nom de d'Alembert, savoir que *les forces motrices d'un système font à chaque instant équilibre à des forces égales et contraires aux forces qui produiraient son mouvement effectif, si tous ses points devenaient libres.*

» On peut présenter le principe de d'Alembert sous une autre forme, utile dans quelques cas. Décomposons la force P appliquée au point M (fig. 57) en deux, dont l'une soit la force désignée par Q, et l'autre une force que nous appellons R. Nommons de même Q', R'; Q'', R'',... les composantes analogues des autres forces P',

P″.... On peut remplacer les forces P, P′, P″, par les forces Q, R ; Q′, R′.... Mais alors on voit que les forces R, R′, R″... doivent se faire équilibre, puisque les composantes Q, Q′, Q″,... donnent le même mouvement que les forces P, P′, P″.... Ces forces sont dites les *forces perdues*. Quant aux composantes Q, Q′, Q″,..., on pourrait les appeler *forces effectives,* puisqu'elles ont sur le système le même effet que les forces motrices P, P′, P″.... On peut donc dire qu'à chaque instant *les forces perdues se font équilibre*.

» Cet énoncé revient au précédent ; car chaque force R est la résultante des forces P et — Q. Dire que les forces R se font équilibre, revient donc à dire que leurs composantes P, — Q, P′, — Q′,... se font équilibre. »

Le même auteur, même tome, p. 100, après avoir posé des équations (4), obtenues par la méthode des multiplicateurs, où λ, μ, ν,... sont des coifficients indéterminés, ajoute les réflexions suivantes :

« Les facteurs λ, μ, ν,... représentent les forces perdues et font connaître les tensions et pressions qui s'exercent dans les liens physiques du système. Pour le bien comprendre, décomposons, comme nous l'avons fait plus haut, la force P dans les deux forces — Q et R, et opérons la même décomposition pour les forces P′, P″.... On sait que si l'on supprime les forces R, R′, R″..., chaque point conservera encore son mouvement. On sait, de plus, que sous l'action des forces Q, Q′, Q″,... chaque point aurait encore le même mouvement, quand bien même il deviendrait entièrement libre ; de sorte que les points assujettis aux liaisons données se meuvent alors sans exercer aucune action les uns sur les autres, et par conséquent les liens physiques du système n'éprouvent ni

tension ni pression lorsqu'on a supprimé les composantes R, R'....

» Si l'on rétablit ces composantes, elles se font équilibre à l'aide des liaisons du système, et le mouvement demeure le même. On voit donc que ces dernières forces produisent seules les tensions et pressions dans les liens du système. Par conséquent, lorsqu'on connaîtra R, R', R"..., on pourra déterminer les actions que les liaisons produisent sur les points du système, et par suite les tensions et pressions que les liens éprouvent, comme on l'a vu, dans un système de points assujettis à des conditions quelconques et soumis à des forces données qui se font équilibre.

» On a d'ailleurs les expressions des forces perdues R, R', R"... Les composantes de R, parallèles aux axes, sont

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2};$$

celles de R' sont

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2},$$

$$Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2}$$

$$Z' - m'\frac{d^2z'}{dt^2}$$

. . . .

Or les équations (4) donnent

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left[\lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \ldots\right],$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = -\left[\lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \ldots\right],$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = -\left[\lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \ldots\right],$$

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -\left[\lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \nu\frac{dN}{dx'} \ldots\right],$$

. . . .

expressions dans lesquelles il faut remplacer λ μ,, ν.... par leurs valeurs déterminées au moyen des équations (4).

A mes yeux, toutes ces conceptions-là qui découlent, il est vrai, du principe de d'Alembert, sont fausses et croulent comme le principe lui-même.

Ou bien la liaison des points est supposée absolue, c'est-à-dire telle que rien ne peut faire varier la distance existante entre eux, ou bien la liaison n'est pas regardée comme absolue, mais comme permettant une certaine variation dans les distances respectives des points, et devant exercer une certaine influence sur l'effet des forces appliquées. Raisonnons dans les deux hypothèses :

1° Considérons des points m', m', m'', etc., comme invariables entre eux et comme respectivement animés des forces P', P', P'', etc., diversement dirigées. Il est évident que le système, à cause de la liaison absolue de ces points, ne peut avoir qu'un même mouvement commun à toutes ses parties, et que ce mouvement doit

être égal à la résultante de tous ceux que prendraient respectivement les points du système, s'ils étaient libres et soumis seulement aux forces P, P′, P″, etc. S'il était permis de décomposer chacune de ces forces en deux autres Q et R, Q′ et R′, Q″ et R″, etc., telles que tout le système dût avoir une vitesse *u* égale en intensité et direction à la vitesse résultant des seules composantes Q, Q′, Q″, etc., il est certain que les autres composantes R, R′, R″, etc., devraient se détruire, se faire équilibre; qu'ainsi on pourrait indifféremment les supprimer ou les laisser appliquées au système. Mais, d'abord, ce n'est point ainsi que le principe de d'Alembert entend procéder ; car, d'après ce principe, les forces perdues R, R′, R″, etc., se font équilibre, et les forces effectives Q, Q′, Q″, etc., ne se composent pas entre elles; elles sont telles qu'elles n'influent pas les unes sur les autres, elles ne se gênent pas, ne *se nuisent pas réciproquement;* elles fonctionnent comme si les points auxquels elles sont appliquées étaient libres. — D'ailleurs, pour avoir ici la vitesse commune résultante, il n'y a pas lieu de diviser les forces P, P′, P″, etc., en forces Q, Q′, Q″, etc., et R, R′, R″, etc., pour ne composer entre elles que les premières Q, Q′, Q″, etc. ; il faut, pour obtenir cette vitesse commune, composer entre elles les forces entières P, P′, P″, etc., et non pas seulement des portions de ces forces qui, par leur composition, ne donneraient pas la vraie vitesse résultante. Mais alors, si le résultat n'est pas nul, il n'y a pas des forces ou vitesses R, R′, R″, etc., qui se détruisent, se font équilibre dans le système ; il n'y a pas de forces effectives Q, Q′, Q″, etc., mais une seule force effective U résultant de la composition de P, P′, P″, etc. Si l'on supposait que cette résultante U est réellement

appliquée à chaque point du système, il faudrait lui attribuer un effet total bien plus considérable que celui qu'elle doit avoir dans le cas dont il s'agit; car, en vertu de la liaison absolue des points, dont chacun serait sous l'action d'une force U, la résultante serait égale à la somme des points multipliée par cette force; ce qui n'est pas : le système entier est seulement soumis à une force résultante U capable de lui imprimer une vitesse commune *u*.

Après cela, si l'on veut comparer la vitesse effective *u* qui, par suite de la liaison, anime tous les points du système aux vitesses qu'ils auraient eues respectivement s'ils eussent été libres, indépendants les uns des autres, en recevant l'action des forces P, P′, P″, etc., on le peut, et on peut même, à ce point de vue, au moyen d'une décomposition supposée de P, P′, P″, etc., en deux forces U et R, U et R′, U et R″, etc., dire que les forces R, R′, R″, etc., sont perdues, mais évidemment cette perte ainsi conçue ne permet point de conclure que R, R′, R″, etc., doivent se détruire, s'équilibrer effectivement. Ce serait commettre une grave confusion, ce serait, d'ailleurs, se jeter dans une impossibilité insurmontable, car, nous l'avons vu, l'équilibre n'a pas lieu entre R, R′, R″, etc., à moins que P, P′, P″, etc., ne soient elles-mêmes en équilibre.

Je pense que l'on me contestera les effets que j'attribue à la liaison absolue supposée entre les points d'un système; mais je soutiens que, dans cette hypothèse d'absolue liaison, les solutions que j'ai présentées sont conformes à la raison.

2° Quant aux points non absolument liés entre eux, j'en conçois deux cas principaux. Supposons un fil

flexible, mais inextensible, portant sur une poulie, et tiré à ses extrémités par deux poids inégaux. Le plus fort poids entraînera le moindre et descendra pendant que celui-ci montera, et ainsi la distance existante entre eux variera, bien que la longueur du fil soit supposée constante. A ce point de vue, la liaison existante entre les deux poids n'est pas absolue, et cependant l'effet, en ce cas, devra être le même que si deux forces P, P′ (fig. 58) égales aux poids dont je viens de parler tiraient en sens contraires deux points *m*, *m* invariablement liés entre eux, dans la direction même de la ligne de ces deux points. En ce cas donc, les forces étant inégales, la vitesse résultante serait égale à la différence des vitesses qu'ils auraient s'ils étaient libres. Encore ici, on le voit, il n'y a pas lieu non plus d'appliquer le principe de d'Alembert. L'on ne serait pas fondé à dire que les forces P et P′ doivent être décomposées chacune en deux forces, l'une effective, l'autre perdue, telles que la force perdue par un des points est détruite par celle que perd l'autre point, et qu'elles se font ainsi véritablement équilibre; on ne le peut, car, en réalité, P étant plus grande que P′, *m*′ perd plus que *m*; *m* perd P′, tandis que *m*′ perd P.

J'arrive à l'autre sorte de liaison non absolue, celle de points tendant plus ou moins à garder leurs distances respectives, comme les molécules d'un corps solide, par exemple, mais pouvant toutefois, jusqu'à un certain point, être écartées les unes des autres par des forces qui leur sont appliquées. En ce cas, évidemment, on ne peut pas, pour déterminer l'effet des forces, les composer toutes entre elles, comme dans le cas de liaison absolue entre les points du système. On ne sait pas, dans

la même hypothèse, quelles peuvent être les pertes de forces, de vitesses, que les points peuvent éprouver par suite de la liaison imparfaite existante entre eux ; elles sont subordonnées non-seulement à l'intensité et à la direction des forces appliquées, mais encore au nombre et à la nature des molécules du système, à leur degré de cohésion, et aussi à leurs positions relatives, celles voisines de la surface pouvant bien être plus mobiles que celles placées vers le centre ou milieu du corps. Au reste, quelles que soient les pertes, l'on ne saurait être fondé à leur appliquer le principe de d'Alembert. Soient P, P', P'', etc., les forces qu'on suppose appliquées aux points du corps ou système; Q, Q', Q'', etc., les forces effectives; R, R', R'', etc., celles qui, composées avec Q, Q', Q'', etc., donneraient pour résultantes P, P', P'', etc.; il ne s'ensuit point, on n'a point le droit de dire qu'il y a réellement une décomposition des forces en ces deux sortes de composantes, et que les composantes R, R', R'', etc., se détruisent en s'équilibrant dans le système.

Si l'on reconnaissait avec moi que, dans le cas de forces appliquées à un système invariable, les forces que l'on dit perdues ne se font pas équilibre, ne se détruisent que quand toutes les forces appliquées sont en équilibre, comment pourrait-on soutenir que les forces dites perdues doivent nécessairement se détruire, s'équilibrer dans un système variable, pour peu qu'il le soit ? Il est bien plausible que, dans les deux cas, l'équilibre des forces qu'on regarde comme perdues n'a pas lieu. Certes, l'on ne peut rationnellement asseoir une théorie sur l'hypothèse de ce chimérique équilibre. D'ailleurs, le principe de d'Alembert, qu'on qualifie de

principe général de la dynamique, est présenté comme s'appliquant à toutes sortes de liaisons, à des mobiles liés entre eux d'une manière quelconque.

Pour moi, que la liaison des points soit absolue ou non, je ne saurais penser que les forces appliquées à ces points P, P', P'', etc., puissent être décomposées respectivement en deux Q et R, Q' et R', Q'' et R'', telles que l'on puisse indifféremment supprimer R, R', R'', etc., ou les conserver dans le système, en y gardant Q, Q', Q'', etc. Ces dernières composantes, dit-on, étant seules mises à la place des forces appliquées P, P', P'', etc., tous les points prennent le même mouvement qu'auparavant; on dit que, moyennant les seules actions de Q, Q', Q'', etc., chaque point a le même mouvement que s'il était libre ; mais, d'après cela, la liaison n'a donc aucune influence sur ces dernières composantes? —Comment l'admettre? Si les points du système étaient invariablement liés entre eux, il faut le reconnaître, cette liaison devrait modifier l'effet des forces quelconques qui y seraient appliquées. Or, les liaisons non absolues, doivent bien aussi avoir quelque influence sur l'effet des forces qui agissent sur le système, quelles que soient ces forces. J'ai dit, il est vrai, que l'action de l'attraction terrestre sur un corps est sensiblement la même sur toutes les molécules de ce corps, malgré leur cohésion; mais c'est que l'attraction ici s'exerce sensiblement suivant des directions parallèles, dans le même sens, avec une égale intensité, sur toutes les molécules du corps, qui se trouvent ainsi dans des conditions analogues. Je conçois donc que la liaison non absolue qui existe entre elles n'ait pas d'influence sensible en ce cas ; mais il ne peut en être de même si les molécules d'un corps sont

soumises à des forces différentes, diversement dirigées ; quelles que soient, d'ailleurs, ces forces, si elles ne se font pas équilibre, la liaison moléculaire doit influer plus ou moins sur leur effet.

Par toutes les raisons que je viens de présenter, il faut rejeter le principe de d'Alembert.

Objectera-t-on que, par l'application de ce principe, on obtient des résultats conformes à l'expérience et souvent aux résultats que donne l'application d'autres principes reconnus, de théories admises?

Je répondrais que les résultats de l'expérience sont souvent loin de s'accorder avec ceux qui découlent de la théorie, et qu'une théorie peut se rapprocher de la réalité expérimentale sans qu'on puisse en conclure que cette théorie est certainement fondée, rationnellement établie. J'ajouterais que le principe de d'Alembert n'est pas le seul qui soit faux et admis dans la science ; qu'il peut arriver qu'une théorie fausse en elle-même donne un résultat exact, que deux théories fondées sur des principes différents aient des résultats semblables et inexacts. J'en trouve des exemples dans la méthode des infiniment petits et dans celle des limites qui donnent des résultats identiques. La méthode des limites, généralement rationnelle, comprend certaines spéculations qui ne le sont pas et dont les résultats sont faux, tandis que la méthode des infiniment petits, toujours vicieuse, donne très-souvent, comme celle des limites, des résultats vrais, exacts.

Je ne saurais m'étonner que Poisson, dans son *Traité de Mécanique*, pour déterminer les conditions d'équilibre de deux corps pesants, posés sur deux plans inclinés et unis par un fil passant sur une poulie située au

sommet des deux plans, arrive, en se fondant sur le principe de d'Alembert, à un résultat semblable à celui qu'on obtient par d'autres procédés, notamment par l'application du principe des vitesses virtuelles, dont je m'occuperai ultérieusement, et cette conformité là ne vient pas justifier le principe de d'Alembert.

« Considérons, dit Poisson (t. 2, p. 11, 2e édition), deux corps pesants, attachés aux extrémités d'un fil qu'on regarde comme inextensible, et posés sur deux plans inclinés, adossés l'un à l'autre. Soient h la hauteur commune de ces deux plans, l la longueur de l'un d'eux, l' celle de l'autre, m la masse du corps posé sur le premier, m' celle du corps posé sur le second, et g la gravité. Si l'on fait abstraction du frottement, la force accélératrice du premier mobile sera égale à la composante de la pesanteur suivant le premier plan, laquelle est égale à $\frac{gh}{l}$, et la force accélératrice du second mobile sera de même égale à $\frac{gh}{l'}$. Désignons, au bout du temps t, par v la vitesse commune à tous les points de m, et par v' celle de tous les points de m'; et convenons de regarder ces vitesses comme positives ou comme négatives, selon que les mobiles descendent ou s'élèvent. Pendant l'instant dt, v et v' augmenteront de dv et dv', mais, pendant ce même instant, les forces accélératrices imprimeraient aux mobiles, s'ils étaient libres, les vitesses positives $\frac{gh}{l}dt$ et $\frac{gh}{l'}dt$: en vertu de la liaison des deux corps, les vitesses qu'ils perdent pendant l'instant dt sont donc $\frac{gh}{t}dt - dv$ et $\frac{gh}{l'}dt - dv'$. Or, pour que les

deux quantités de mouvement correspondantes se fassent équilibre, il faut évidemment qu'elles soient égales; par conséquent on aura

$$m\left[\frac{gh}{l}\,dt - dv\right] = m'\left[\frac{gh}{l'}\,dt - dv'\right] \ (1).$$

De plus, les deux vitesses v et v' sont égales et de signe contraire; car, dans le mouvement dont il s'agit, l'une des deux masses descend et l'autre s'élève, en parcourant des espaces égaux sur les plans inclinés. On a donc

$$v' = -v,\ dv' = -dv.$$

Je substitue cette valeur de dv dans l'équation (1); d'où je déduis ensuite

$$dv = \frac{(ml - m'l)h}{(m + m')ll'}\,gdt,$$

et, en intégrant,

$$v = \frac{(ml' - m'l)h}{(m + m')ll'}\,gt + c;$$

c étant la constante arbitraire. »

c, dit-on, représente la vitesse initiale. Si cette vitesse est nulle, et qu'on ait $ml' = m'l$, les vitesses des deux mobiles, sont nulles, et l'équilibre a lieu. Ainsi la condition d'équilibre est que les masses, et par conséquent les poids des deux corps, soient dans le rapport des longueurs des plans inclinés sur lesquels ils sont posés.

Mais, d'après ma critique précédente, ce n'est pas légitimement que l'on pose l'égalité

$$m\left[\frac{gh}{l}dt - dv\right] = m'\left[\frac{gh}{l'}dl - dv'\right] \quad (1)$$

entre ce qu'on appelle les forces perdues ou les quantités de mouvement se rapportant aux forces perdues dans l'espèce. Dans le cas présent, comme dans celui de deux forces tirant les extrémités d'un fil inextensible, en sens contraire, suivant la direction même du fil, si les forces sont inégales, les forces ou vitesses que l'on peut considérer comme perdues sont inégales.

De ce que la formule obtenue

$$v = \frac{(ml' - m'l)\,h}{(m + m')\,ll'}\,gt$$

s'accorde avec le résultat trouvé par d'autres procédés en ce que notamment, si l'on fait $ml' = m'l$, on a $v = o$, et qu'ainsi, dans le cas de l'équilibre, on a $ml' = m'l$, il ne s'ensuit pas que le principe de d'Alembert doive être vrai; même en regardant comme rigoureusement exact ce résultat, on peut rejeter le principe en question, car, je le répète, il se peut qu'une méthode irrationnelle conduise à un juste résultat. D'ailleurs, on peut supposer que la formule, dont il s'agit, qui donne la valeur de v, est erronée, bien que, en y faisant $ml' = m'l$, on ait un résultat nul pour la valeur de v, et que, dans le cas de l'équilibre, en effet, on doive avoir $ml' = m'l$; car cette même formule peut être inexacte d'ailleurs, elle peut pécher dans le dénominateur $(m + m')\,ll'$, ou dans le facteur hgt.

J'ajoute que la précédente analyse, ainsi que d'autres procédés au moyen desquels on est arrivé à des formules dont on a conclu que, dans le cas de l'équilibre, on doit

avoir $ml' = m'l$, est contestable en ce que l'on décompose chaque poids en deux forces, l'une parallèle et l'autre normale au plan sur lequel il porte, pour ne faire figurer dans le calcul que la composante parallèle, procédé que j'ai précédemment critiqué et qui ne peut être exact d'après les considérations que j'ai présentées à ce sujet.

Pour la solution du même problème, on a cru pouvoir arriver aux mêmes résultats sans employer le principe de d'Alembert, en introduisant la tension T.

$mg \sin \alpha$ étant la force motrice du corps m, dans la direction de son mouvement, et $m \frac{d^2x}{dt^2}$ étant celle qui donnerait à ce point supposé libre le mouvement qu'il a réellement, on a posé

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \sin \alpha - T, \qquad (1)$$

$$m' \frac{d^2x}{dt^2} = m'g \sin \alpha' - T, \qquad (2)$$

d'où, en éliminant la tension T,

$$m \left[g \sin \alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right] = m' \left[g \sin \alpha' - \frac{d^2x}{dt^2}\right],$$

équation identique à celle qu'on obtient par l'application du principe de d'Alembert, en employant les mêmes notations ; mais je conteste aussi cette analyse.

L'équation (1) exprime que la force capable de donner au corps m supposé libre le mouvement qu'il a réellement, est égale à la force motrice de ce corps, moins la tension, et l'équation (2) a une signification sembla-

ble à l'égard du corps m'. Or ces égalités ne sont pas fondées. Si on les admet, c'est qu'on se fait une fausse idée de la tension, que l'on considère comme égale à la force perdue par chaque mobile, tandis que, d'après les discussions que j'ai présentées à cet égard, la tension n'est pas égale à la force perdue, et que, d'ailleurs, hors le cas d'équilibre, la force perdue par l'un des mobiles n'est pas égale à celle perdue par l'autre.

J'ai dit que divers procédés inexats peuvent avoir des résultats identiques : on en voit ici un exemple, puisque, à des points de vue différents, mais qui pèchent l'un et l'autre, on est arrivé à une même formule.

On applique le principe de d'Alembert à la détermination du mouvement d'un système de corps liés entre eux par des fils ou des cordons, et mobiles sur un plan horizontal, en supposant que la force motrice est le poids d'un corps qui tire le dernier cordon.

Soient (fig. 59) m, m', m'' les masses des corps placés sur le plan AB, μ la masse du poids moteur. « A un instant quelconque, dit-on, tous les points du système ont une même vitesse v. Donc $m\frac{dv}{dt}$, $m'\frac{dv}{dt}$, $m''\frac{dv}{dt}$, $\mu\frac{dv}{dt}$ représentent les forces qui seraient capables de donner à ces masses, si elles était libres, leur mouvement effectif. D'ailleurs μg est la force motrice du système, et cette force doit faire équilibre aux précédentes prises en sens contraires. L'équation du mouvement est donc

$$\mu g-\mu\frac{dv}{dt}-m\frac{dv}{dt}-m'\frac{dv}{dt}-m''\frac{dv}{dt}=o,$$

ou plus simplement

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu g}{M},$$

en posant

$$\mu + m + m' + m'' = M. »$$

On applique ici cette conséquence du principe de d'Alembert, que les forces effectives du système devraient faire équilibre aux forces motrices, doctrine que j'ai rejetée et qui n'est pas soutenable, d'après les considérations et les exemples que j'ai présentés pour en montrer la fausseté. Je n'accepte donc point la solution qui précède.

On est arrivé au même résultat, sans faire usage du principe de d'Alembert, en faisant figurer ce qu'on appelle les tensions. « Soient, dit-on, T, T', T'' (fig. 59) les tensions des trois fils. La tension T', par exemple, est égale à l'une quelconque des deux forces égales et contraires qu'il faudrait appliquer aux points m' et m'' pour remplacer le fil qui les unit, s'il venait à être supprimé. Or on a évidemment

$$m\frac{dv}{dt} = T$$

$$m'\frac{dv}{dt} = T' - T,$$

$$m''\frac{dv}{dt} = T'' - T',$$

$$\mu\frac{dv}{dt} = \mu g - T''.$$

En ajoutant toutes ces équations, on a encore

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu g}{M}. »$$

Je me borne à dire que $m\frac{dv}{dt}$, $m'\frac{dv}{dt}$, etc., ne représentent pas vraiment les tensions, telles qu'elles doivent être comprises. D'après la discussion que j'ai présentée à ce sujet, les tensions T, T', etc., ne sont point égales aux vitesses effectives, aux forces qui seraient capables de donner aux masses m, m', etc., si elles étaient libres, leur mouvement effectif. D'ailleurs, pourquoi considérer deux tensions entre m'' et μ ? Pourquoi, après avoir dit que la tension T'', placée entre m'' et μ, est représentée par $m''\frac{dv}{dt}$, admettre et considérer encore une autre tension $\mu\frac{dv}{dt}$ entre T'' et μ. Il n'y a ici que trois fils, on le dit, et puis on calcule quatre tensions. Cela n'est pas rationnel. Suppose-t-on une tension entre m'' et le point où le fil s'appuie sur une extrémité du plan, ou plutôt sur la poulie placée à cette extrémité, et de plus une tension entre ce point de support et μ ? — Cette division ne serait pas justifiable.

On prétend trouver le mouvement du centre de gravité en appliquant le principe de d'Alembert.

« Considérons, dit M. Sturm (ouvrage cité, t. II, p. 194), un système de points matériels m, m', m''..., sollicités respectivement par des forces P, P', P''..., dont les composantes parallèles aux axes sont X, Y, Z; X', Y', Z'..... En vertu du principe de d'Alembert, si l'on applique au point m des forces parallèles aux trois

axes et égales respectivement à $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$, et aux autres points des forces analogues, toutes ces forces doivent se faire équilibre au moyen des liaisons du système....

» Ainsi l'équilibre existant entre les forces mentionnées, dans le système dont nous étudions le mouvement, il subsistera encore si l'on introduit entre les différents points de nouvelles liaisons telles que l'on voudra, pourvu qu'elles ne soient pas incompatibles avec les conditions données ; on peut supposer, par exemple, que les distances des différents points du système deviennent invariables, si les liaisons sont telles, que les points puissent se déplacer sans que leurs distances changent. Il en résulte que les forces doivent satisfaire aux six équations d'un système solide, pourvu toutefois qu'après la solidification il n'y ait aucun point fixe ni aucun point assujetti à demeurer soit sur une courbe, soit sur une surface fixe. En faisant cette restriction, les trois premières équations d'équilibre donnent

$$\sum\left[X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right] = o,$$

$$\sum\left[Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right] = o,$$

$$\sum\left[Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right] = o,$$

ou bien

$$(1)\quad \sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X, \quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y,$$

$$\sum m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z.$$

» Pour que le système puisse se déplacer comme un corps solide, c'est-à-dire sans que les distances de ses points varient, il faut et il suffit que chaque équation de condition se réduise à une relation entre les distances de ses différents points....

» Reprenons les équations (1), qui ont lieu dans le mouvement de tout corps solide libre ou de tout système qui peut se mouvoir comme un corps solide. Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité et M la masse totale du système. On a toujours

$$M x_1 = \sum mx, \; M y_1 = \sum my, \; M z_1 = \sum mz$$

et, par suite

$$(2) \quad \begin{cases} M \dfrac{dx_1}{dt} = \sum m \dfrac{dx}{dt}, \\ M \dfrac{dy_1}{dt} = \sum m \dfrac{dy}{dt}, \\ M \dfrac{dz_1}{dt} = \sum m \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Si l'on suppose un point matériel toujours placé au centre de gravité du système, ces formules feront connaître sa vitesse à une époque quelconque, l'orsqu'on connaîtra celles de tous les points du système.

» En différentiant de nouveau les équations (2) et en ayant égard aux équations (1), on trouve

$$(3)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \sum X, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \sum Y, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \sum Z. \end{cases}$$

De là résulte le théorème suivant :

» *Le centre de gravité de tout système libre se meut comme si les masses de tous les points matériels y étaient réunies et que les forces motrices y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.*

» Si l'on connaît le mouvement de chaque point du système, celui du centre de gravité sera également connu à un instant quelconque, au moyen des formules

$$M x_1 = \sum mx,\ M y_1 = \sum my,\ M z_1 = \sum mz,$$

sans qu'on ait besoin de recourir au théorème précédent; mais celui-ci est principalement utile pour déterminer le mouvement du centre de gravité, lorsqu'on ne connaît pas ceux de tous les points du corps. Toutefois il faut connaître l'état initial du système afin d'avoir la position et la vitesse initiale du centre de gravité.»

Je n'accepte point cette démonstration fondée sur le principe de d'Alembert qui est faux. D'ailleurs, le théorème relatif à la détermination du mouvement du centre de gravité ne peut être exact; il est chimérique comme le centre de gravité lui-même; il repose, comme ce centre, comme le principe de d'Alembert, sur des données fausses touchant l'effet de la liaison supposée obsolue de points soumis à des forces.

Ainsi, dans le cas où ces points liés invariablement entre eux ne seraient soumis qu'à des forces égales parallèles et de même sens, on croit bien que cette liaison doit déterminer une résultante des forces, telle que, appliquée parallèlement à celles-ci, à un certain point dit centre de gravité, le système entier, s'il était soumis à cette seule résultante agissant à ce point central, aurait exactement le même mouvement qu'il a par toutes les actions des forces agissant aux points du système où elles sont appliquées. Mais, du reste, en ce cas, on n'attribue à la liaison des points aucun effet, aucune influence réelle sur le mouvement que le système peut prendre par les actions des forces : que les points considérés soient absolument indépendants, ou qu'ils soient liés absolument entre eux, on pense que les forces égales et parallèles appliquées à ces points leur donneront le même mouvement dans l'un et l'autre cas. Or ma raison proteste contre cette doctrine; elle me dit que si les points d'un corps étaient invariablement liés entre eux, ne pouvaient aucunement varier dans leurs distances respectives, les forces appliquées à ces points produiraient, *pour le système entier*, un mouvement égal à celui qui résulterait, pour un point isolé et libre, de la composition de toutes les forces à ce point parallèlement à leurs directions.

Je soutiens que si des forces, parallèles ou non, égales ou non, de sens quelconque, sont appliquées aux points matériels d'un système supposé absolument invariable, le système entier devra avoir une vitesse égale à celle qu'imprimerait à un point libre quelconque la résultante de toutes ces forces composées à ce point. Par conséquent, si les forces appliquées sont parallèles et de même sens, il n'y a pas de forces perdues, il y a

accroissement plus ou moins grand de mouvement pour tous les points du système, par l'effet de la liaison existante entre eux.

Quelle que soit d'ailleurs la vitesse réelle, effective, que prenne chacun des points d'un système par l'action simultanée de forces qui leur sont respectivement appliquées, je n'admets pas qu'ils pussent avoir encore la même vitesse si, à la place de ces forces, il y avait des forces capables d'imprimer à ces points, s'ils étaient libres, la vitesse qu'ils ont effectivement dans leur état de liaison. Le supposer, ce serait n'attribuer ici aucun effet à la liaison des points ; ce que ma raison rejette.

Or c'est contrairement à ces vérités que se sont édifiés le principe de d'Alembert et la théorie du centre de gravité.

Je maintiens que, théoriquement, l'hypothèse d'un système absolument invariable aux points duquel seraient appliquées des forces exclut la possibilité du centre de gravité, et conséquemment le théorème qui a pour objet de déterminer le mouvement de ce centre. Dans la même hypothèse, on devra obtenir le mouvement du système entier en transportant les forces motrices parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque et en les composant entre elles : la résultante sera la force effective. D'après le théorème que je critique, il n'en serait pas ainsi : pour avoir la force effective, il faudrait diviser cette résultante des forces motrices entre tous les points matériels du système.

En réalité, il n'y a pas de système absolument invariable, pas de points matériels invariablement liés entre eux ; mais en dehors de l'hypothèse de cette invariabilité absolue, on tombe dans le vague, on n'a aucune

base certaine pour déterminer les effets des liaisons incomplètes pouvant exister entre les parties d'un système. A ce point de vue, le principe de d'Alembert et la théorie du centre de gravité s'évanouissent encore.

Toutes ces assertions sont suffisamment éclairées par les discussions qui s'y rapportent et que j'ai déja produites dans ce livre.

Il est certain que, par l'effet de la liaison de corps, de points soumis à des forces, les uns peuvent perdre, les autres peuvent gagner, au contraire, une plus ou moins grande quantité de mouvement. Tel est, par exemple, le cas où un corps en mouvement vient en choquer un autre en repos ou marchant dans le même sens. Le corps choqué en ce cas sera mis en mouvement, ou son mouvement sera augmenté, tandis que celui du corps choquant sera diminué par la résistance du corps choqué. J'ai déjà dit que l'on a voulu appliquer le principe de d'Alembert à la détermination de la vitesse commune qui anime les deux corps après le choc. On a dit que, d'après ce principe, l'équilibre devait exister entre les deux masses animées des vitesses respectivement perdue et gagnée. Les masses étant représentées par m et m', les vitesses avant le choc par v et v', et u exprimant leur vitesse après le choc, on a posé l'équation

$$m\,(v-u) = m'\,(u-v')$$

d'où

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

D'Alembert lui-même, par l'application de son prin-

cipe, est arrivé à cette solution dans son *Traité de Dynamique* (1).

Dans cet ordre d'idées, si les corps allaient en sens contraire, on trouverait, pour la vitesse après le choc,

$$u = \frac{mv - m'v'}{m + m'}.$$

Mais, le principe de d'Alembert étant faux, l'application qu'on en fait ici ne prouve rien en faveur de ces résultats que j'ai déja critiqués à d'autres points de vue.

On admet ce qu'on appelle la conservation du mouvement du centre de gravité, et on la déduit des équations (3) ci-dessus exprimant le mouvement du centre de gravité. On commence par assurer que si, parmi les forces appliquées au système, il y en a qui proviennent d'actions mutuelles entre des points, celles-ci seront toujours égales deux à deux, à cause de l'égalité constante de l'action et de la réaction ; que, d'ailleurs, d'après ce principe même, étant directement opposées l'une à l'autre, elles ne pourront donner aucun terme dans les seconds membres des mêmes équations (3), et conséquemment n'ont jamais aucune influence sur le mouvement du centre de gravité. Or, dit-on, quand toutes les forces motrices transportées parallèlement à elles-mêmes en

(1) Un corps, dit-il (seconde partie, chapitre III, problème IX), dont la masse est m et la vitesse u se mouvant sur une même ligne avec un autre corps dont la masse est M et la vitesse U, trouver la vitesse de ces corps après le choc.

Soit v la vitesse du premier corps après le choc, V celle du second : on fera (art. 23) $u = v + u - v$ et $U = V + U - V$. Il faut, par notre principe, que $V = v$ et que $m(u - v) + M(U - v) = o$. Donc v ou $V = \frac{mu + MU}{M + m}$.

un point quelconque s'y font équilibre, on a

$$\sum X = o, \sum Y = o, \sum Z = o;$$

alors les équations du mouvement du centre de gravité se simplifient et deviennent

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = o,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx_1}{dt} = c, \quad \frac{dy_1}{dt} = c', \quad \frac{dz_1}{dt} = c'',$$

c, c', c'' étant des constantes. D'où l'on conclut que le mouvement du centre de gravité est toujours rectiligne et uniforme, et c'est en cela que consiste la *loi* ou le *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.*

Mais, même en supposant vraie la théorie relative au mouvement du centre de gravité, je contesterais la loi de la conservation de ce mouvement; car je n'accepte pas le principe d'égalité de l'action et de la réaction sur lequel on la fonde.

CHAPITRE IX

DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

DE LA THÉORIE DU POTENTIEL.

Soient A, A′, A″... (fig. 60), des points matériels soumis à de certaines conditions, comme de se trouver à des distances invariables les uns des autres. On suppose que tout le système soit transporté de la position qu'il occupe dans une position *infiniment voisine* qui satisfasse à toutes les conditions données, et l'on appelle *vitesse virtuelle* ou déplacement virtuel de l'un quelconque de ces points la *droite infiniment petite* A*a* qui joint sa première position à la seconde. On entend, par le mot *virtuel*, que le mouvement attribué au système est seulement possible, qu'il n'a pas lieu réellement et qu'il n'y a même pas lieu de considérer les forces qui seraient capables d'opérer ce mouvement.

En supposant qu'on applique aux points matériels A, A′, A″..., des forces P, P′, P″..., et en désignant par *p*, *p*′, *p*″..., les projections des déplacements virtuels A*a*, A*a*′..., sur les directions de ces forces, on appelle *moment virtuel de la force* P, *par exemple, le produit de la valeur absolue de cette force par la projection* p *du dépla-*

cement virtuel A*a* *de son point d'application, et il en est ainsi des autres forces* P′, P″... *sous ce rapport.* On convient de regarder chaque projection comme positive ou négative, selon qu'elle est dirigée à partir du point d'application dans le même sens que la force ou en sens contraire; mais, d'après la définition du moment, le moment virtuel a toujours le même signe que la projection qui le concerne; il est évidemment nul si la vitesse virtuelle est perpendiculaire à la direction de la force.

On a donné une autre forme au moment virtuel. On a d'abord

$$\mathrm{P}p = \mathrm{P} \times \mathrm{A}a \times \cos \mathrm{PA}a = \mathrm{P} \cos \mathrm{PA}a \times \mathrm{A}a,$$

et en désignant par T la composante de la force P suivant le déplacement A*a*, on a $\mathrm{T} = \mathrm{P} \cos \mathrm{PA}a$, d'où

$$\mathrm{P}p = \mathrm{T} \times \mathrm{A}a.$$

Ainsi, dit-on, *le moment virtuel est égal au produit du déplacement virtuel multiplié par la composante de la force suivant la direction du déplacement.*

On énonce ainsi le principe des vitesses virtuelles : *Si des forces en nombre quelconque se font équilibre sur un système de points matériels assujettis à des conditions données, la somme des moments virtuels est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les conditions données, et réciproquement, il y a équilibre si la somme des moments virtuels est nulle pour tous les mouvements possibles du système.*

L'on a tenté de démontrer ce principe. Ainsi, en ce qui concerne l'équilibre d'un point matériel, on a raisonné de la manière suivante :

« Soit R (fig. 61) la résultante d'un nombre quelconque de forces P, P', P''... appliquées à un même point A; soit Aa une droite quelconque *finie ou infiniment petite* menée par le point A, et appelons r, p, p', p''..., les projections de Aa sur R, P, P', P''...; je dis que *le moment virtuel de la résultante est égal à la somme des moments virtuels des composantes.*

» En effet, si λ, α, α', α''.... désignent les angles que les forces R, P, P', P''... font avec Aa, on a

$$R \cos \lambda = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots$$

Soit A$a = \sigma$, on aura

$$R \sigma \cos \lambda = P \sigma \cos \alpha + P' \sigma \cos \alpha' + P'' \sigma \cos \alpha'' \ldots;$$

mais

$$\sigma \cos \lambda = r, \quad \sigma \cos \alpha = p, \quad \sigma \cos \alpha' = p';$$

donc on aura

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots$$

» Il résulte de là que si les forces P, P', P''.... se font équilibre et si le point A est libre dans l'espace, on aura pour tout déplacement du point A, puisque $R = o$,

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = o,$$

ce qui démontre le principe des vitesses virtuelles dans le cas particulier d'un seul point matériel entièrement libre dans l'espace. »

L'on assure que dans le cas où le point A (fig. 62) est assujetti à demeurer sur une surface donnée S, le

principe se vérifie aussi facilement. On allègue que tout déplacement *infiniment petit* Aa de ce point s'effectue alors dans le plan tangent à la surface ; d'où l'on conclut que, pour l'équilibre du point A, il faut et il suffit que la résultante R soit normale à la surface, et qu'on ait par conséquent r ou R$r = o$, ou bien

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = o.$$

Cette spéculation-là pèche comme le principe même, en ce que, d'abord, il ne peut y avoir un déplacement infiniment petit. Elle ne saurait d'ailleurs s'appliquer au cas où la surface considérée serait courbe, car une surface courbe n'étant point composée de surfaces planes même infiniment petites, le point A qui, dans l'hypothèse, devrait y demeurer, ne saurait être justement considéré comme s'y déplaçant d'une distance rectiligne infiniment petite, comme on le suppose.

L'on n'est point plus heureux quand on veut démontrer que *si l'on applique aux extrémités d'une droite rigide et inflexible* AB *deux forces égales et contraires dirigées suivant cette droite, leurs moments virtuels seront égaux et de signes contraires.*

« Supposons, dit M. Sturm, t. II, p. 65, que le mouvement virtuel amène AB en ab (fig. 63) : menons la droite AF parallèle et égale à ab. La figure AFba étant un parallélogramme, les projections AC et HD de Aa et de Fb sont égales et dirigées dans le même sens, en allant de A vers C, puis de H vers D. Or il suffit évidemment de faire voir que le rapport des projections $AC = q$, $BD = q_1$, tend vers l'unité, lorsque les points a et b se rapprochent de A et de B, en se mouvant sur

des courbes quelconques AZ et BM, et qu'en outre ces deux projections, en devenant infiniment petites, sont dirigées dans le même sens, l'une de A vers C, l'autre de B vers D.

» Maintenant on a

$$\frac{AB}{HD} = \frac{HB}{BF} \cdot \frac{BF}{HD} = \frac{HB}{BF} \cdot \frac{BF}{AC};$$

mais dans le cercle décrit du point A comme centre, avec AB comme rayon, et qui passe par le point F, on a

$$BF^2 = BH.\ 2\ AB;$$

par conséquent

$$\frac{BH}{BF} = \frac{BF}{2AB}.$$

Donc

$$\lim \frac{BH}{BF} = o.$$

D'un autre côté $\lim \frac{BF}{AC}$ n'est pas infinie, à moins que Aa ne soit perpendiculaire à AB. En effet, BF et AC sont deux grandeurs indépendantes l'une de l'autre, puisque pour transporter AB en ab, on peut d'abord faire tourner cette droite autour du point A, puis la transporter parallèlement à elle-même en ab. On conçoit alors que le rapport des droites BF et AC doit tendre en général vers une limite finie qui dépend de la nature des courbes AL et BM.

» Le rapport $\frac{HB}{HD}$ a donc pour limite *o*. Il s'ensuit que le rapport

$$\frac{BD}{HD} = \frac{BD}{AC} = \frac{q_1}{q}$$

tend vers l'unité et que BD est dirigé dans le sens HD ou AC. Ainsi les projections infiniment petites q_1 et q sont égales et dirigées dans le même sens. D'ailleurs les forces Q et Q_1 sont égales et contraires. Donc leurs moments sont égaux et de signes contraires, et l'on a

$$Qq + Q_1q_1 = o.$$

Je remarque dans cette analyse bien des irrégularités. 1° La droite AB supposée rigide et inflexible ne peut tourner sur elle-même ou sur le point A ; 2° on suppose un rapport de quantité entre la droite BH et la courbe BF et entre la courbe BF et la droite AC, rapports impossibles ; 3° de ce que le rapport $\frac{HB}{HD}$ aurait pour limite *o*, qu'ainsi le rapport $\frac{BD}{HD} = \frac{BD}{AC} = \frac{q_1}{q}$ tendrait vers l'unité, il ne s'ensuivrait pas que les projections infiniment petites q_1 et q sont égales. Tant que ces projections ne seront pas nulles, elles seront inégales dans l'exemple, et quand elles seront nulles, elles ne seront pas infiniment petites ; ce qui n'est pas n'a pas de quantité.

Pour démontrer le principe des vitesses virtuelles

dans sa généralité, on a distingué les systèmes à liaisons complètes et ceux à liaisons incomplètes.

« Soient, dit M. Sturm, A (x, y, z), A′ (x', y', z'), A″ (x'', y'', z''),.... un nombre quelconque n de points assujettis à des conditions données. Ces conditions seront ordinairement exprimées par un certain nombre d'équations entre les coordonnées de ces points. Le nombre des équations doit d'ailleurs être moindre que $3n$, sans quoi chaque point aurait une position fixe et resterait en repos quelles que fussent les forces appliquées au système ; mais il peut être égal à $3n - 1$. Dans ce cas, où le système est dit à *liaisons complètes*, tous les points sont assujettis à demeurer sur des courbes données AL, A′L′ ..., et le déplacement de l'un des points entraîne celui de tous les autres. En effet, en éliminant x', y', z', x'', y'', z'', etc., on tirera des équations données les valeurs de y et de z en fonction de x, savoir :

$$y = \varphi(x), \; z = \psi(x),$$

et ces équations représenteront une courbe AL, sur laquelle le point A (x, y, z) sera obligé de demeurer. On verra de la même manière que les autres points ne peuvent se mouvoir que sur des courbes déterminées. En outre, toutes les variables moins une, x, pouvant s'exprimer en fonction de celle-ci, quand on connaîtra la position de l'un des points, A, par exemple, celles de tous les autres seront déterminées : les déplacements infiniment petits qu'on peut faire subir aux points du système ont donc avec l'un d'eux des relations qui résultent des $3n - 1$ équations données.... »

Le système à liaisons incomplètes est celui dans le-

quel les coordonnées des points sont liées entre elles par un nombre i d'équations, i étant $< 3n - 1$.

Je ne crois pas devoir reproduire ici la suite de ces spéculations. Je me borne à dire qu'elles ne sont pas rationnelles, en ce que l'on y suppose des déplacements infiniment petits, des courbes formées de droites infiniment petites, des rapports de quantité entre des courbes et des droites.

Dans les applications du principe des vitesses virtuelles on commet aussi des irrationalités.

On a dit :

« Soient M une molécule attirante de masse m, O le point attiré, et désignons par a, b, c les coordonnées de m, par x, y, z celles de O, par r la distance MO ; l'attraction de M sur O sera $mf(r)$, $f(r)$ étant une certaine fonction dont la forme dépendra de la loi de l'attraction. La droite OM faisant avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus sont

$$\frac{a-x}{r} = -\frac{dr}{dx}, \quad \frac{a-y}{r} = -\frac{dr}{dy}, \quad \frac{a-z}{r} = -\frac{dr}{dz},$$

les composantes suivant les axes coordonnés de la force qui agit sur O seront

$$mf(r)\frac{dr}{dx}, \; mf(r)\frac{dr}{dy}, \; mf(r)\frac{dr}{dz};$$

et si l'on pose

$$F(r) = -\int f(r)\,dr,$$

ces trois composantes deviendront

$$\frac{d.\, m\,\mathrm{F}(r)}{dx},\ \frac{d.\, m\,\mathrm{F}(r)}{dy},\ \frac{d.\, m\,\mathrm{F}(r)}{dz}.$$

» Les autres molécules m', m''..... de la masse attirante donneront des expressions semblables. En les ajoutant, on trouve, pour les composantes de l'attraction totale exercée en O,

$$\mathrm{X} = \frac{d.\sum m\,\mathrm{F}(r)}{dx},\ \mathrm{Y} = \frac{d.\sum m\,\mathrm{F}(r)}{dy},$$

$$\mathrm{Z} = \frac{d.\sum m\,\mathrm{F}(r)}{dz},$$

la somme $\sum$ devant s'étendre à toutes les molécules m, m', m''..... Posons maintenant,

$$\mathrm{U} = \sum m\,\mathrm{F}(r),$$

ces composantes prendront la forme très-simple

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{U}}{dx},\ \mathrm{Y} = \frac{d\mathrm{U}}{dy},\ \mathrm{Z} = \frac{d\mathrm{U}}{dz}.$$

U est le potentiel de l'attraction exercée par la masse que l'on considère. Il n'est fonction que des coordonnées x, y, z du point attiré, et ses dérivées partielles représentent, comme nous venons de le voir, les composantes de l'action totale exercée en ce point.

» Concevons que le point O, indépendamment des forces qui agissent sur lui, vienne à se déplacer suivant une direction quelconque, ou prenne un mouvement virtuel : $-mf(r)\,dr$, $-m'f(r')\,dr'$,... seront les moments

virtuels des attractions exercées par les points m, m'..., et — $\Sigma\, mf\,(r)\,dr$, ou la somme de tous ces moments, sera le moment virtuel de la résultante. Le potentiel n'est donc autre chose que l'intégrale de la différentielle qui exprime le moment virtuel de l'attraction exercée sur le point O. Soit ds un élément de la courbe décrite dans le mouvement virtuel du point O, et faisant avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, la composante suivant la direction ds de l'attraction totale exercée sur le point O sera

$$\frac{dU}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dU}{dz}\frac{dz}{ds}=\frac{dU}{ds}.$$

» Une surface qui contiendra tous les points où le potentiel U a une valeur constante séparera d'abord les parties de l'espace où U est inférieur à cette valeur constante, de celles où il lui est supérieur. Pour une ligne quelconque située sur cette surface $\frac{dU}{ds}$, ou la composante de l'attraction suivant la tangente à cette ligne, est nulle. Il suit de là que la résultante en chaque point de la surface considérée est normale à cette surface et qu'elle agit du côté de l'espace contigu aux valeurs plus grandes de U. Nous donnerons à cette surface le nom de *surface de niveau*. Quand la ligne s ne sera pas tout entière sur une même surface de niveau, on pourra par chacun de ses points mener une surface de niveau ; et si s coupe toutes ces surfaces à angles droit, une tangente menée à cette ligne indiquera en chacun de ses points la direc-

tion de la résultante, dont $\frac{dU}{ds}$ exprimera l'intensité.

» Soient R la résultante et θ l'angle que sa direction fait avec l'élément ds d'une ligne quelconque, la projection de R sur la tangente à cette ligne sera

$$R \cos \theta = \frac{dU}{ds}.$$

L'intégrale

$$\int R \cos \theta \, ds = \int \frac{dU}{ds} ds,$$

étendue à un segment arbitraire de la ligne s, est évidemment égale à $U_1 - U_0$, U_0 et U_1 étant les valeurs du potentiel aux extrémités de la ligne. Il en résulte : 1° que la valeur de l'intégrale est indépendante de la nature de la courbe qui unit les deux points extrêmes, et 2° que si s est une ligne fermée, l'intégrale étendue à la ligne entière sera nulle. »

Cette théorie, se liant étroitement à celle des vitesses virtuelles que j'ai critiquée, ne peut être rigoureuse, exacte.

On y considère des infiniment petits ; on y regarde une courbe comme formée d'éléments infiniment petits, qn'on met en rapport de quantité avec des droites, des éléments rectilignes.

CHAPITRE X

DES MOMENTS D'INERTIE ET DES AXES PRINCIPAUX.

L'on porte à neuf les intégrales définies que renferment les équations du mouvement, ce sont

$$\int xdm,\ \int ydm,\ \int zdm,$$
$$\int xydm,\ \int zxdm,\ \int yzdm,$$
$$\int z^2dm,\ \int y^2dm,\ \int x^2dm\,;$$

dm étant l'élément différentiel de la masse, qui répond aux trois coordonnées rectangulaires x, y, z, et les intégrales s'étendant à la masse entière du mobile.

« Or, dit-on, les trois premières dépendent de la position du centre de gravité ; et si l'on appelle x_1, y_1, z_1, ses trois coordonnées, et M la masse entière du mobile, on aura

$$\int xdm = Mx_1,\ \int ydm = My_1,\ \int zdm = Mz_1\,;$$

en sorte que chacune de ces intégrales sera nulle, lorsqu'on prendra ce point pour l'origine des coordonnées.

» Quelle que soit cette origine, on peut toujours dé-

terminer la direction des trois axes de manière qu'on ait

$$\int xydm = o, \int zxdm = o, \int yzdm = o.$$

» Les trois axes rectangulaires des x, y, z, qui font ainsi disparaître ces trois intégrales, s'appellent des *axes principaux*.

» Quant aux trois dernières des neuf intégrales, on les exprimera au moyen de trois autres que nous représenterons par A, B, C, et qui seront

$$A, = \int (y^2 + z^2)\, dm, B = \int (z^2 + x^2) dm,$$
$$C = \int (x^2 + y^2) dm ;$$

d'où l'on tire

$$2\int z^2 dm = A + B - C,$$
$$2\int y^2 dm = C + A - B,$$
$$2\int x^2 dm = B + C - A.$$

» On appelle, en général, *moment d'inertie* d'un corps par rapport à une droite quelconque, la somme des éléments de sa masse, multipliés par les carrés de leurs distances à cette droite. Ainsi A, B, C, seront les moments d'inertie du mobile par rapport aux axes des x, y, z ; car, par exemple, $y^2 + z^2$ est le carré de la distance de dm à l'axe des x. Lorsque ces droites seront des axes principaux, nous appellerons A, B, C, des moments d'inertie *principaux*. »

L'exemple le plus simple de la détermination des moments d'inertie est le calcul du moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle et homogène, par rapport à l'une de ses arêtes.

Pour cela, on prend trois de ses arêtes adjacentes a, b, c, pour axes des x, y, z, et l'on divise par la pensée chacune de ces trois droites en une infinité de parties infiniment petites. On mène par tous les points de division des plans parallèles aux faces du parallélipipède, on a ainsi trois séries de plans qui le partagent en éléments infiniment petits dans leurs dimensions. Le volume de l'élément répondant aux trois coordonnées x, y, z, étant $dx\,dy\,dz$, on a, pour sa masse

$$dm = \rho\, dx\, dy\, dz\,;$$

ρ étant la densité du parallèlipipède, que l'on suppose constante. Par conséquent, le moment d'inertie C, par rapport à l'arête qu'on a prise pour axe des z, et dont la longueur est c, est

$$C = \rho \int\int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

On étend cette intégrale triple à tous les éléments du parallélipipède donné, en intégrant, dans un ordre quelconque, depuis $x = o$, $y = o$, $z = o$, jusqu'à $x = a$, $y = b$, $z = c$; ce qui donne

$$C = \rho \left[\frac{a^2bc}{3} + \frac{ab^2c}{3}\right],$$

ou ce qui est la même chose,

$$C = \frac{1}{3} M\, (a^2 + b^2)\,;$$

M étant la masse du corps, de sorte qu'on ait

$$M = \rho abc.$$

On a de même

$$B = \frac{1}{3}M(c^2 + a^2),\ A = \frac{1}{3}M(b^2 + c^2),$$

pour les moments d'inertie du même corps, par rapport aux arêtes dont les longueurs sont b et a.

D'après mes critiques précédentes, on ne s'étonnera point que je conteste l'exactitude de cette analyse, où l'on a recours à l'infiniment petit, où l'on regarde un corps, un parallélipipède comme formé d'une infinité de parallélipipèdes infiniment petits. Pour déterminer les moments d'inertie d'un corps rond, d'un ellipsoïde, par exemple, on se permet aussi de le considérer comme formé d'une infinité de parallélipipèdes d'une infinie petitesse; ce qui est inadmissible à un double point de vue. D'ailleurs, les corps n'étant pas continus, mais composés de molécules très-distantes les unes des autres, relativement à leur volume, continues dans leur étendue ou composées elles-mêmes de particules distantes, mais moins distantes les unes des autres que les molécules principales ne le sont entre elles, à ce point de vue encore les analyses en question ne pourraient leur être exactement applicables. Cette sorte d'inexactitude n'est point entièrement corrigée par l'intervention du signe ρ par lequel la densité du corps est représentée dans le calcul.

CHAPITRE XI

DU TRAVAIL D'UNE FORCE. — DE LA FORCE VIVE ET DE LA MOINDRE ACTION. — DE L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

On appelle *travail* d'une force *constante*, pendant un temps donné, le produit de son intensité par le chemin que son point d'application a parcouru, en supposant que ce dernier se déplace dans la direction même de la force. Si cette dernière condition n'a pas lieu, on décompose la force en deux autres, l'une dans la direction du mouvement, l'autre perpendiculaire dont on ne tient pas compte, parce qu'on la considère comme détruite. C'est alors le travail de la première composante qui est celui de la force donnée. A ce point de vue, on définit le travail : *le produit du chemin que parcourt le point d'application, par la projection de la force sur sa direction.*

Si la force considérée n'est pas constante, on partage le temps en instants *infiniment petits* pendant lesquels l'intensité est jugée invariable, et le *travail élémentaire* de la force est le produit de cette intensité par le chemin parcouru pendant chacun de ces instants.

Le *kilogramme* étant l'unité de force, et le mètre l'unité de chemin parcouru, on prend pour *unité de travail* le kilogramme multiplié par le mètre, et l'on nomme cette unité *kilogrammètre*. Souvent, toutefois, on se sert d'une unité plus considérable appelée *cheval-vapeur*.

Il est admis que, quand une machine marche avec un *mouvement uniforme*, le travail *moteur* est égal au travail *résistant*. Le premier se divise en deux parties, l'une produite par l'*opérateur*, l'autre employée à vaincre les *résistances passives*. Le travail de l'opérateur est ainsi moindre que le travail moteur. — On nomme *effet utile*, *travail utile* ou *rendement* d'une machine, le rapport entre le travail de l'opérateur et celui du moteur.

Précédemment, nous avons vu que l'on mesure l'intensité d'une force constante par la quantité de mouvement mv, qu'elle communique à un corps libre, de masse m pendant une seconde. Or l'espace parcouru pendant la première seconde par ce mobile partant de l'état de repos étant égal à $\frac{1}{2}v$, si l'on multiplie cet espace ainsi exprimé par l'intensité mv de la force, on a $\frac{1}{2}mv^2$ qui, dit-on, représente le travail accompli, par la force pendant une seconde. Leibnitz a nommé ce produit *force vive*.

En d'autres termes, on appelle force vive d'un point matériel, ou plus généralement d'un corps dont tous les points ont la même vitesse, le produit de sa masse par le carré de cette vitesse.

L'analyse s'appliquant à ce sujet est arrivée aux propositions suivantes :

« La somme des forces vives d'un système de points matériels est constante toutes les fois que les points du système ne sont soumis à aucune force motrice, et que leurs vitesses ne varient, en grandeur et en direction, qu'à raison de leurs liaisons mutuelles, ou de l'obligation où ils peuvent être de se mouvoir sur des surfaces ou sur des courbes fixes et données.

» Si tous les points du système occupent les mêmes positions à deux époques différentes, les sommes de leurs forces vives seront aussi les mêmes à ces deux époques. »

Les forces qui produisent le choc des corps de nature quelconque sont considérées comme les actions réciproques de leurs molécules. Or, dans le choc des corps doués d'une élasticité parfaite, on suppose que les mobiles reprennent, après la percussion, exactement la forme qu'ils avaient auparavant, et que tous leurs points reviennent à leurs positions primitives. « Si donc, dit Poisson (t. II, p. 479, 2e édition), cela a lieu effectivement pour deux ou plusieurs corps de forme quelconque, lorsqu'ils commencent à se séparer après s'être choqués, la somme de tous leurs points sera la même à cet instant, que dans le premier moment de la percussion ou, autrement dit, il n'y aura aucune perte de force vive dans le système.... »

Mais, dans le cas du choc des corps non élastiques, on trouve que la somme des forces vives est $mv^2 + m'v'^2$ avant le choc, et $mu^2 + m'u^2$ après le choc, u étant alors la vitesse commune des deux mobiles, m, m' leurs masses et v, v' leurs vitesses avant le choc, ces vitesses étant de même signe ou de signes contraires, selon que les deux mobiles vont à la suite ou au devant l'un de l'au-

tre. Or la seconde somme étant toujours moindre que la première, il y a ici perte de force vive.

« Si, dit-on, le système de points matériels est soumis à une force R d'attraction ou de répulsion qui émane d'un centre fixe, et que la distance r soit α à l'origine du mouvement, et u au bout du temps t, on aura $\pm 2\int_{\alpha}^{u} \mathrm{R}dr$ pour la variation de la force vive du système, produite par la force R, pendant le temps t. Lorsque cette force sera répulsive, il y aura augmentation ou diminution de force vive, selon que la distance r aura augmenté ou diminué; le contraire aura lieu quand la force R sera attractive.

» Il en sera de même à l'égard des actions mutuelles des points du système. En appelant F l'action mutuelle de m et m', par exemple, et ρ la distance mm', on trouvera $\pm\ 2\int_{\alpha}^{u} \mathrm{F}d\rho$ pour la variation de la force vive du sys tème qui produira cette force pendant que la distance ρ passera de $\rho = \alpha$ à $\rho = u$. Le signe supérieur ayant lieu dans le cas d'une action répulsive, et la quantité F étant toujours positive, on voit qu'il y aura augmentation ou diminution de force vive, selon que l'on aura $u > \alpha$ ou $u < \alpha$, c'est-à-dire selon que la distance ρ aura augmenté ou diminué. Le signe inférieur aura lieu et la force F produira des effets inverses, lorsqu'elle sera attractive.

» Si le point m est assujetti à demeurer sur une surface mobile, et si $\mathrm{L} = o$ est l'équation de cette surface, en appelant N la résistance de cette même surface et en faisant, pour abréger, $v = \left[(\frac{d\mathrm{L}}{dx})^2 + (\frac{d\mathrm{L}}{dy})^2 + (\frac{d\mathrm{L}}{dz})^2\right]^{-\frac{1}{2}}$,

la variation de force vive aura, pour valeur, $-2\int \mathrm{N\,V}\frac{d\mathrm{L}}{dt}dt$; l'intégrale étant prise de manière qu'elle soit nulle quand $t=o$. Cette variation pourra être positive ou négative, selon le signe de $\frac{d\mathrm{L}}{dt}$ et selon celui de V, qui dépendra du sens dans lequel la force N s'exercera.

» Les frottements et les résistances des milieux produisent toujours des diminutions de force vive, qui finissent par anéantir le mouvement du système, quand d'autres forces ne viennent pas réparer ces pertes. »

Je n'ai pas besoin de faire remarquer que ces résultats ont été obtenus par l'application de quelques-uns des principes que j'ai contestés, renversés dans les chapitres précédents. On y applique, en effet, le principe de d'Alembert, celui de l'égalité de l'action et de la réaction ; on ne tient aucun compte des composantes normales, qu'on regarde comme détruites, sans effet ; on y fait abus de l'infiniment petit. En un mot, les démonstrations, les calculs manquent de rigueur.

L'on a admis un principe appelé *de la moindre action*, consistant en ce que, dans le mouvement d'un système de corps pour lequel le principe des forces vives a lieu, si l'on fait le produit de la vitesse de chaque point matériel du système, de sa masse et de l'élément de sa trajectoire ; que l'on prenne la somme des produits semblables pour tous les mobiles, et qu'on intègre cette somme depuis une position donnée du système jusqu'à une autre position aussi donnée, la valeur de cette intégrale sera généralement un *minimum*.

Le principe de la moindre action revient à dire que

l'intégrale du produit de la force vive du système et de l'élément du temps est généralement un minimum, en sorte que, dans la nature, un système de corps serait transporté d'une position dans une autre, en dépensant la moindre quantité possible de force vive.

Dans la démonstration qu'on présente de ce principe, on considère *ds* comme l'élément infiniment petit d'une courbe quelconque, et l'on met cet élément en rapport avec des éléments infiniment petits rectilignes; procédé qui n'est point rationnel, car l'infiniment petit est chimérique, et il n'y a pas de rapport de quantité entre une courbe et une droite.

Il est une école qui va jusqu'à affirmer que, dans la nature, il y a constamment la même quantité de force vive. L'on convient que dans certain cas, quand, par exemple, deux corps s'entrechoquent et s'arrêtent par leur résistance mutuelle, leur force vive est sensiblement détruite; mais, dit-on, il y avait entre eux de l'air, un fluide élastique quelconque, qui a été pressé, comprimé dans le choc et qui a été mis en mouvement de telle sorte que la force vive qui animait les mobiles leur a été transmise en même temps que ceux-ci l'ont perdue. C'est là une hypothèse contestable; car on ne saurait déterminer précisément l'effet de la compression des fluides dont il s'agit. Il faut être bien décidé à soutenir le principe de la conservation absolue de la force vive, pour prétendre que la quantité de celle qui est donnée aux fluides interposés, est alors justement égale à celle qui est perdue dans le choc par les mobiles eux-mêmes.

Cette doctrine très-problématique se rattache à la théorie moderne de l'*équivalent mécanique de la chaleur* et rentre dans l'idée générale de la *corrélation des forces*

physiques, suivant laquelle la force ne peut pas être anéantie, mais est seulement sous-divisée ou altérée dans sa direction et dans ses caractères. « Lorsque le mou-
» vement est arrêté ou empêché par le mouvement en
» sens contraire d'un autre corps, dit M. Grove, une
» nouvelle force, ou un nouveau genre de force naît
» alors, et sa manifestation, au lieu de mouvement visi-
» ble, est de la chaleur.... Toutes les fois qu'un corps
» est comprimé ou amené à des dimensions moindres, il
» s'échauffe ou fait dilater les substances environnantes;
» toutes les fois qu'il se dilate ou augmente de volume, il
» se refroidit ou fait contracter les substances qui l'envi-
» ronnent.

» Il y a une différence remarquable dans le caractère
» ou le mode de la force éliminée ou engendrée par le
» frottement, suivant que les corps qui frottent l'un
» contre l'autre sont homogènes ou hétérogènes; s'ils
» sont homogènes, il n'y a que de la chaleur produite;
» s'il sont hétérogènes, ce sera de l'électricité.

» Le mouvement produit donne de la *chaleur* et de
» *l'électricité*. L'électricité produite par mouvement
» engendre le *magnétisme*, force qui est toujours déve-
» loppée par des courants électriques perpendiculaire-
» ment à la direction des courants. La *lumière* aussi est
» facilement produite par le mouvement, soit directe-
» ment, comme l'orsqu'elle accompagne la chaleur née
» du frottement, soit médiatement, par l'électricité ré-
» sultant du mouvement, comme dans l'étincelle élec-
» trique....

» En prenant maintenant la chaleur comme point de
» départ, on trouvera que les autres modes de force peu-
» vent être produits par elle.... Dans beaucoup de cas

» où l'une des forces est excitée ou existe, toutes les
» autres sont aussi mises en action. Toutes et chacune
» peuvent naître de l'exercice de l'une quelconque d'en-
» tre elles. »

Je l'accorde, mais ce qui me paraît bien contestable, c'est que tout cela puisse s'expliquer par des actions et des mouvements de la matière ordinaire, sans le secours d'aucun fluide particulier, comme le croient M. Grove et bien d'autres avec lui. Ce qui ne me semble point non plus certain, ni même plausible, c'est qu'il y ait une équivalence exacte, absolue entre les productions successives dont il s'agit.

« Toutes les fois, dit-on, que du travail mécanique est détruit, il y a production de chaleur; réciproquement il y a du travail créé toutes les fois que de la chaleur disparaît sans qu'on puisse la retrouver dans les corps environnants.

» La chaleur produite par le travail mécanique est équivalente à ce travail. »

A l'appui de ces relations entre la chaleur et le travail dynamique, on cite de nombreuses expériences, et principalement celles de Joule. Celui-ci, par exemple, ayant mis de l'eau dans un vase, l'agita au moyen d'aubes mues par des forces mesurables, et détermina à la fois la quantité de chaleur développée par l'agitation du liquide et la quantité de travail dépensée dans cette opération. Il parvint à des constatations analogues en opérant avec du mercure et avec de l'huile de baleine. Ayant fait frotter l'un contre l'autre des disques en fonte de fer, il mesura la chaleur produite par leur frottement, et la force dépensée pour le vaincre. Faisant passer de l'eau à travers des tubes capilaires, il détermina la

quantité de chaleur engendrée par le frottement du liquide contre les parois des tubes. De ces expériences, il conclut que, dans tous ces cas, la quantité de chaleur engendrée par une même quantité de force est fixe et invariable, et crut pouvoir assurer qu'une quantité de force, employée à faire tourner les disques de fer l'un contre l'autre, produit précisément la même quantité de chaleur que lorsque ce travail mécanique est dépensé à agiter de l'eau, du mercure ou de l'huile de baleine. — Il est vrai que, dans ces expériences, les températures finales étaient très-différentes ; que celle de l'eau, par exemple, était le trentième de celle du mercure ; mais M. Joule s'efforça de tenir justement compte de ces différences.

On nomme *équivalent mécanique de la chaleur* la quantité de travail qui est produite par une *calorie*, ou, ce qui revient au même, la quantité de travail qui, dépensée pour exercer le frottement, la compression, la percussion, etc., dégagerait une calorie.

Divers procédés ont été pratiqués pour évaluer l'équivalent mécanique de la chaleur.

Par la compression des gaz, toute correction faite, M. Joule a trouvé, pour cet équivalent, la valeur *moyenne* de 444 *kilogrammètres;* c'est-à-dire que la chaleur suffisante à élever d'un degré centigrade la température d'un kilogramme d'eau, équivaudrait à une force capable d'élever 444 kilogrammes à un mètre de hauteur, et réciproquement.

Le même physicien, en faisant passer de l'air comprimé d'un récipient dans une cloche pleine d'eau, a obtenu, dans trois expériences distinctes, les valeurs 451 ^{km}, 447 ^{km} et 418 ^{km}, soit, en moyenne, 438$^{km}\frac{2}{3}$.

Le même, en partant de la chaleur dégagée dans le frottement des liquides, est arrivé au chiffre de 430 ^{km} avec l'eau, et de 432 ^{km} avec le mercure.

Pour le frottement des solides, l'équivalent obtenu a été de 432 ^{km}.

M. Mayer, en faisant dilater un gaz, a trouvé la valeur 377 ^{km}, et M. Seguin, au moyen de l'expansion de la vapeur, a obtenu le nombre 449 ^{km}.

On voit que les nombres trouvés par les diverses méthodes diffèrent notablement. Maintenant l'on s'accorde généralement à adopter le nombre 424 ^{km} pour représenter l'équivalent mécanique de la chaleur, mais ce chiffre ne sera-t-il pas abandonné plus tard et détrôné par un autre ? C'est probable. Au reste, alors même que des expériences donneraient exactement le même résultat, l'on ne serait pas en droit d'en déduire une loi absolue, et il s'en faut de beaucoup que les expériences dont il s'agit soient dans ce cas. Tout en admirant les savants travaux dont j'ai donné un faible résumé, je ne saurais regarder comme certain que le travail ou mouvement produit par la chaleur est l'exact équivalent de la chaleur employée, des mouvements qui constituent cette chaleur, et réciproquement. La variété des substances, la multiplicité changeante des conditions où elles se trouvent, ne permettent pas d'assurer que les phénomènes dont il s'agit puissent suivre la marche invariable qu'impliqueraient les règles inflexibles que la théorie proclame. Il me paraît plus rationnel d'admettre qu'il n'y a ici que de l'à peu près, qu'il y a toujours, en réalité, quelque différence, une inégalité plus ou moins grande entre les quantités de travail et de chaleur qu'on regarde comme absolument égales ou équivalentes ;

mais que l'on peut néanmoins, dans la pratique, supposer cette égalité, cette équivalence, sans commettre une erreur importante, et adopter, jusqu'à nouvel ordre, tel chiffre pour l'expression de l'équivalent mécanique de la chaleur, sans le considérer lui-même comme certainement exact. En procédant ainsi on ne donnerait pas, il est vrai, à la science ce prestige dont on veut l'entourer en la réduisant à des lois, à des principes absolus; mais on resterait dans la vérité, ce que le philosophe doit, avant tout, rechercher.

CHAPTRE XII.

DU MOUVEMENT CURVILIGNE.

L'on professe qu'un corps en mouvement et abandonné à lui-même doit marcher en ligne droite. On se fonde sur l'inertie. Pour qu'un corps en mouvement suive une ligne courbe, il faut, dit-on, qu'une force vienne à chaque instant changer sa direction. Si cette force cessait d'agir à un point quelconque M de la courbe, le mobile quitterait la courbe à ce point en marchant dans la direction du dernier élément parcouru, c'est-à-dire suivant la direction de la tangente à la courbe, avec une vitesse uniforme qu'on appelle la vitesse du mobile au point M.

Ces conceptions-là ne sont pas rationnelles. On ne peut pas justement considérer une courbe comme composée d'un très-grand nombre, d'une infinité de lignes droites extrêmement ou infiniment petites, ayant chacune une direction différente.

On peut, par la pensée, la diviser en parties de plus en plus petites, mais chacune des parties conçues en elle est encore une courbe. Un mouvement en ligne courbe, s'il a lieu, n'est donc pas vraiment un mouvement changeant continûment de direction; car une direction implique

une ligne droite, si petite qu'elle soit, et, je le répète, une courbe n'est pas formée de droites. Un mouvement curviligne est un mouvement *sui generis*, essentiellement différent du mouvement en ligne droite.

M'objectera-t-on que la tangente à une courbe est le prolongement d'un élément de cette courbe ; que par conséquent il faut bien considérer cet élément comme une petite droite, comme une droite infiniment petite ? Bien vaine serait l'objection : la tangente n'est point un prolongement d'élément de la courbe, la tangente est une droite qui ne touche la courbe que par un point mathématique. Bien qu'il n'y ait pas une partie de la courbe qui se confonde avec une partie de la tangente, elles se touchent en ce sens qu'elles ne se coupent pas et qu'il n'y a aucun espace entre elles. Il ne s'agit pas ici d'un contact *réel*, *matériel*.

D'après cela, il n'est pas plausible qu'un mouvement curviligne puisse être déterminé par des forces agissant en ligne droite. Supposons (fig. 64) qu'un corps a soit soumis à deux forces, l'une agissant suivant la direction ab, l'autre suivant la direction ac, et que ces forces soient proportionnelles, la première à ab, l'autre à ac. Admettons que, dans un instant, la résultante de ces deux actions soit de faire venir le mobile de a en a', d'après la règle du parallélogramme des forces. Le mobile rendu en a' aura une vitesse proportionnelle à aa' que je représente par $a'b'$. Si de plus le mobile au point a' est soumis à une force représentée par $a'c'$, égale et parallèle à ac, la résultante de la vitesse $a'b'$ et de la vitesse imprimée par la force $a'c'$ le portera en a'', et, en supposant que le mobile soit ainsi successivement soumis à sa vitesse acquise et à la vitesse causée par une force égale et parallèle à

ac, on concevra aisément qu'il décrive, par son mouvement, une *ligne continuellement brisée*. On pourra réduire de plus en plus, par la pensée, la longueur des petites droites inégales de la ligne totale ainsi produite, mais on ne peut admettre qu'elles soient réduites au point de former, par leur réunion, au lieu d'une ligne brisée, une ligne essentiellement courbe.

Au reste, on peut penser que, dans la réalité, il n'y a pas de mouvement curviligne, que les mouvements qui nous paraissent tels décrivent des lignes brisées.

Dans son *Cours de Mécanique*, t. 1er, p. 162, M. Sturm, traitant du mouvement curviligne et des forces qui le produisent, établit que, si la force qui sollicite le mobile est constante d'intensité et de direction, les composantes de la vitesse suivant trois axes rectangulaires, s'obtiennent en prenant les vitesses des projections sur ces axes, et qu'on aura, pour ces projections,

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v \cos \beta, \quad \frac{dz}{dt} = v \cos \gamma,$$

α, β, γ étant les angles que la direction de la vitesse fait avec les axes x, y, z,

et il en déduit

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2},$$

d'où

$$v = \frac{ds}{dt}$$

en désignant par s la longueur d'un arc compté sur la trajectoire à partir d'un point fixe.

Ensuite, s'occupant du cas où la force qui agit sur le mobile est variable, il obtient les mêmes formules que dans le cas où la force est constante.

« Dans tous les cas, dit-il, on a

$$\cos \alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{v} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt},$$

ou

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \cos \gamma = \frac{dz}{ds};$$

donc la vitesse est dirigée suivant la tangente MT.

» Ces formules, poursuit-il, peuvent encore être obtenues par la méthode des infiniment petits. Pendant le temps infiniment petit dt, le mobile parcourt sur sa trajectoire un espace infiniment petit ds. On peut considérer son mouvement comme rectiligne et uniforme pendant le temps dt, puisque la vitesse ne varie qu'infiniment peu en grandeur et en direction. On aura donc

$$ds = vdt, \text{ d'où } v = \frac{ds}{dt}.$$

D'ailleurs la direction de la vitesse est celle de l'élément ds ou de la tangente au point M. »

Puis l'auteur, au moyen de l'analyse, arrive à ce résultat, que si X, Y, Z représentent les composantes de la force motrice, et m une molécule, on aura

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, m\frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

formules qui, dit-il, montrent que les projections du

point mobile sur chaque axe se meuvent comme des points matériels de même masse sollicités uniquement par les composantes de la force motrice suivant cet axe.

Il ajoute que si X, Y, Z représentaient les composantes accélératrices, on aurait plus simplement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Un peu plus loin, l'auteur, sous ce titre : *Décomposition de la force motrice en force tangentielle et force centripète,* raisonne ainsi :

« Soit M un point entièrement libre dans l'espace et sollicité par plusieurs forces dont la résulante est P. On sait que si X désigne la composante de cette force parallèle à l'axe des x, on a

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2};$$

mais si α est l'angle que la tangente à la trajectoire fait avec l'axe des x, et v la vitesse, on a

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\,(v \cos \alpha)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha + v \frac{d \cos \alpha}{dt};$$

or

$$\frac{d \cos \alpha}{dt} = \frac{d \frac{dx}{ds}}{dt} = v \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{v}{\rho} \cos \lambda,$$

λ étant l'angle que fait avec l'axe des x la droite qui va

du point M au centre du cercle osculateur à la courbe en ce point, et ρ le rayon du cercle osculateur: donc

$$X = m\frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{mv^2}{\rho}\cos\lambda.$$

Cette équation exprime que la projection de la force P sur un axe quelconque est égale à la somme des projections sur cet axe : 1° d'une force $m\frac{dv}{dt}$, dirigée suivant la tangente à la courbe; 2° d'une force $\frac{mv^2}{\rho}$, dirigée suivant la normale qui passe par le centre de courbure. *Donc* P *est la résultante de ces deux dernières forces.*

» Ainsi, dans le mouvement d'un point en ligne courbe, la force motrice P se décompose à chaque instant en deux forces: l'une, dirigée suivant la tangente, est nommée la *force tangentielle* ; l'autre, dirigée suivant le rayon de courbure, se nomme la *force centripète*. En désignant la première par T, la deuxième par Q, on aura donc

$$T = \frac{mdv}{dt}, \; Q = \frac{mv^2}{\rho}.$$

C'est cette dernière force qui produit la courbure de la trajectoire en écartant le mobile de la tangente.

» Il résulte de là que le plan qui passe par la force motrice et par la tangente est le plan osculateur au point M, puisqu'il renferme le centre de courbure.

» Quand le point matériel est sollicité par plusieurs forces dont P est la résultante, on peut décomposer chacune des premières forces en deux autres dirigées l'une suivant la tangente et l'autre perpendiculairement à cette tangente, et par conséquent dans le plan normal à la courbe. Les forces tangentielles se composeront en une

seule T, égale à leur somme algébrique, et les forces normales se composeront aussi en une seule Q, nécessairement dirigée suivant le centre de courbure. Il résulte de là que si une des forces appliquées au point M est normale à la trajectoire, elle ne donnera pas de composante suivant la tangente et n'entrera pas dans la valeur de $m \frac{dv}{dt}$: en d'autres termes, elle n'influera pas sur l'accélération du mobile. De même une force dirigée suivant la tangente à la trajectoire n'aura aucune influence sur la valeur $\frac{mv^2}{\rho}$, et par suite ne tendra pas à changer la direction du mobile. »

Cette analyse n'est point rationnelle : on y suppose des rapports de quantité entre des droites et des courbes ; on y considère une courbe comme formée d'une infinité de droites infiniment petites ; on y regarde un arc supposé infiniment petit comme une petite droite, et à ce point de vue l'on s'y livre à des calculs trigonométriques qui ne peuvent être rigoureux.

J'accorde qu'au point de vue où se place M. Sturm, la force normale à la courbe ne donne pas de composante à la force tangentielle ; mais il est certain que, par la composition de ces deux forces, d'après la règle du parallélogramme des forces, chacune d'elles doit influer plus ou moins sur la force résultante dans sa grandeur et dans sa direction, et par conséquent sur la vitesse et la direction du mouvement résultant, les forces s'appréciant sous le double rapport de la direction et de la vitesse par les mouvements qu'elles peuvent produire.

On dit que c'est la force normale à la courbe qui produit sa courbure en écartant le mobile de la tan-

gente, ou bien encore que la normale sert à retenir sur la courbe le mobile qui, sans cela, s'échapperait par la tangente. Je reconnais que la normale à la trajectoire joue le principal rôle en ce qu'elle agit continuellement d'un même côté de la tangente et détermine ainsi le sens de la courbe, dont la concavité est tournée constamment vers la normale. Néanmoins la forme de la courbure dépend non-seulement de la force normale à la trajectoire, mais encore de la force ou vitesse tangentielle, car elle dépend de la proportion existante entre les grandeurs de ces deux composantes, de sorte que, en variant la grandeur de l'une ou de l'autre, on peut faire varier la direction, la courbure de la résultante.

Vainement, pour écarter l'influence que j'attribue aux deux composantes à la fois sur la grandeur et la direction de la résultante, dirait-on qu'il s'agit ici de composantes instantanées, qui sont extrêmement petites, d'une petitesse infinie. Qu'importe la petitesse, qui n'est que relative et ne saurait apporter aucun changement aux lois concernant la composition des forces ou vitesses, la détermination de leur résultante ?

Mais, si l'on applique aux composantes des courbes la règle du parallélogramme des forces ou vitesses, il s'ensuivra qu'une courbe ne pourra pas être parcourue d'un mouvement uniforme par un mobile qui, libre d'ailleurs, sera animé d'abord d'une vitesse rectiligne, et soumis continuellement à une force normale à la direction de la vitesse tangentielle; car alors continuellement la résultante des vitesses sera plus grande que chacune d'elles, et ainsi la vitesse du mouvement rectiligne résultant croîtra de plus en plus. Pourtant on professe que, dans l'hypothèse, le mouvement du mobile doit

être uniforme, et même on arrive, par l'analyse, à donner la valeur relative que doit avoir alors à chaque point la composante normale, et l'on exprime cette valeur par la formule générale $\frac{mv^2}{\rho}$, m étant la masse du mobile, v sa vitesse uniforme, et ρ représentant le rayon de la courbe, si elle est un cercle, ou, dans les autres cas, le rayon du cercle osculateur à la courbe.

On voit que, dans cette spéculation, il y a un vice radical; car elle croule si l'on attribue à la normale une influence sur la vitesse du mouvement résultant, et, d'autre part, si l'on suppose que la normale n'influe pas sur cette vitesse, on viole la règle du parallélogramme des forces ou vitesses. La conséquence rationnelle est qu'on doit abandonner cette dernière hypothèse et regarder comme fausses les analyses et les solutions qui l'impliquent.

On dit que si deux forces ou vitesses qui animent un mobile sont perpendiculaires entre elles, l'une *n'altère* pas l'autre, et l'on peut le dire en ce sens que l'une ne donne pas de composante à l'autre, quand, pour la décomposition d'une force ou vitesse, on est convenu de ne prendre que des composantes rectangulaires entre elles. Toujours est-il que les deux forces normales l'une à l'autre se composent l'une avec l'autre et quelles ont une résultante oblique plus grande que chacune d'elles ; qu'en ce sens elles *s'altèrent* mutuellement dans leur grandeur et dans leur direction ; que si une courbe est supposée décrite par un point continuellement soumis à deux forces ou vitesses perpendiculaires l'une à l'autre, les résultantes successives seront plus grandes que leurs composantes et dirigées entre elles.

Toutes les composantes influeront sur la vitesse et la direction de la courbe résultante.

On admet une force centrifuge opposée à la force centripète.

« Supposons, dit M. Sturm, même ouvrage, t. Ier, p. 181, que le point M (fig. 65) soit sollicité par une certaine force motrice P. On peut faire abstraction de la courbe, si l'on joint à la force P une certaine force N, normale à la courbe, force égale et contraire à la pression que le point M exerce sur elle. Décomposons la force P en deux autres T et Q, la première dirigée suivant la tangente, et la seconde située dans le plan normal de la courbe. Soit F la résultante des deux forces Q et R, situées toutes les deux dans le plan normal. La force F agira suivant le rayon de courbure, et l'on aura

$$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{T},\ \frac{mv^2}{\rho} = \mathrm{F}.$$

La force F, dirigée suivant le rayon du cercle obsculateur et qui agit à chaque instant pour empêcher le mobile de s'écarter de la courbe suivant la tangente, est la *force centripète.* Une force F′, égale et contraire à la force F, qui la détruit à chaque instant, est appelée la *force centrifuge.* La force N étant égale et contraire à la pression exercée à chaque instant par le mobile sur la courbe, cette pression s'obtiendra en cherchant la résultante des deux forces Q et F′ qui font équilibre à la force N. On aura

$$\mathrm{F} : \mathrm{Q} = \sin \mathrm{QMN} : \sin \mathrm{FMN},$$

ce qui donne la position de MN.

» Dans le cas général, la force centrifuge en chaque point est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile et en raison inverse du rayon de courbure en ce point.

» Si la force motrice était normale à la courbe, on aurait

$$T = o, \text{ ou } m \frac{dv}{dt} = o;$$

par suite

$$v = \text{constante}:$$

le mouvement serait uniforme.

» Si la force motrice était dirigée suivant la tangente à la courbe, on aurait $Q = o$. Alors la force N se confondrait en grandeur et en direction avec la force centripète F, et la pression exercée sur la courbe par le mobile avec la force centrifuge F'. »

On établit encore le principe des forces centripète et centrifuge de la manière suivante :

« Soit un point matériel parcourant une circonférence d'un mouvement uniforme. Dans ce cas, la résultante des forces agissant sur le mobile doit passer par le centre de la circonférence (1); car, autrement, cette force serait décomposable en deux autres, l'une suivant le rayon, l'autre dans un plan perpendiculaire à ce rayon. L'effet de cette dernière composante serait de détourner le point du plan du cercle décrit, ou de modifier sa vitesse, et en ce cas le mouvement ne serait pas uniforme. De plus, la résultante des forces doit avoir une inten-

(1) Ici, bien entendu, l'on ne comprend pas la vitesse tangentielle dans les forces agissant sur le mobile.

sité constante, car elle fait dévier à chaque instant le mobile, dont la vitesse est supposée invariable, d'une quantité constante, par rapport à l'élément qu'il vient de parcourir. Or la force qui empêche le mobile de quitter la circonférence suivant la tangente, et le ramène sans cesse vers le centre, se nomme *force centripète*, et l'on nomme *force centrifuge* la tendance du mobile à s'éloigner du centre.

» Considérons l'élément infiniment petit *mc* de la circonférence (fig. 66), faisant avec la direction *c'ma* un angle *amc* infiniment petit. Joignons au centre du cercle les extrémités de l'élément *mc*, et menons *cb* parallèle à *ma*. La figure *macb* est un parallélogramme; car, *mc* étant un infiniment petit, *ac* peut être considéré comme parallèle à *mb*. On voit, d'après la règle du parallélogramme des vitesses, que, pendant que le mobile parcourt l'arc *mc*, il parcourrait l'espace *ma*, en vertu de sa vitesse suivant *c'm*, s'il n'était soumis à aucune force; et l'espace *mb*, sous l'influence d'une force dirigée de *m* au centre, si la vitesse suivant *c'm* n'existait pas. Cette force est la force centripète; son effet, composé avec l'impulsion suivant *ma*, produit le mouvement résultant dans la direction *mc*.

» Menons *ad* parallèle à *mc*; nous formons le nouveau parallélogramme *mcad*. La vitesse du mobile suivant la diagonale *ma* peut être décomposée en deux autres, l'une suivant *mc* dans la direction du mouvement circulaire, l'autre suivant le prolongement *md* du rayon. Cette dernière représente la force centrifuge, et comme on a $md = ac = mb$, on voit qu'elle est à chaque instant contrebalancée par la force centripète, qui lui est égale et opposée, ce qui fait que la vitesse suivant *mc* reste

seule. Si la force centripète cessait d'agir, la résultante *ma* des vitesses *mc*, *md*, entraînerait le mobile dans la direction de la tangente. »

On établit comme il suit ce qu'on appelle les lois de la force centrifuge :

La force centrifuge dans le mouvement circulaire est : 1° *proportionnelle au carré de la vitesse;* 2° *proportionnelle à la masse du mobile;* 3° *en raison inverse du rayon du cercle décrit.* Supposons d'abord le mouvement uniforme, et soit *mc* (fig. 67) un arc infiniment petit de circonférence, décrit pendant un temps infiniment petit θ, par un mobile dont la masse est égale à l'unité. Pendant le même temps, le mobile parcourrait, sous l'influence seule de la force centripède F, l'espace *mb* d'un mouvement uniformément accéléré ; car cette force agit avec une intensité constante pendant le temps infiniment petit θ. On aura donc $mb = \frac{1}{2} F\theta^2$. Or, l'arc *mc* se confondant avec sa corde, on a $mb = \overline{mc}^2 : 2R$; de plus, le mouvement étant uniforme, on a $mc = v \times \theta$, v étant la vitesse du mobile. En éliminant *mc* et *mb* entre les trois égalités ci-dessus, il vient $F = v^2 : R$; formule qui donne la valeur de la force centripète, ou de la force centrifuge qui lui est égale.

« Nous avons supposé la masse du mobile égale à l'unité. Si cette masse est *m*, il faudra multiplier le second membre de la formule par *m* ; car chaque unité de masse du mobile tend à fuir le centre avec la même énergie ; et la formule devient

$$(1) \qquad F = m \frac{t^2}{R}.$$

» Cette formule contient les lois énoncées ci-dessus. On peut la mettre sous une autre forme. Soit T le temps employé par le mobile à parcourir la circonférence entière, d'un *mouvement uniforme*. L'espace $2\pi R$ parcouru pendant ce temps est égal à vT; on a donc $2\pi R = vT$. Portant la valeur de v tirée de cette égalité dans la formule (1), elle devient.

$$(2) \qquad F = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

» On voit donc que, *lorsque plusieurs corps de même masse décrivent pendant le même temps des circonférences de différent rayon, les forces centrifuges sont proportionnelles aux rayons de ces circonférences.*

» Supposons maintenant que le mouvement circulaire ne soit pas uniforme, la force qui agit sur le mobile devra toujours être dans le plan du cercle, sans quoi elle donnerait une composante perpendiculaire à ce plan qui en détournerait le mobile. Supposons cette force décomposée à chaque instant en deux autres, l'une suivant le rayon, l'autre tangente à la circonférence. La première n'a pas d'effet pour modifier la vitesse, puisqu'elle est perpendiculaire à sa direction; c'est la force centripète F, qui sert à maintenir le mobile sur la circonférence. L'autre fait varier la vitesse, on la nomme force tangentielle, elle a pour mesure la masse du mobile multipliée par l'accélération qu'elle produirait si la force restait constante pendant l'unité de temps. La force centripète et la force centrifuge qui lui est égale à chaque instant, sont toujours représentées par la formule $F = mv^2 = R$. Il faut remarquer ici que la vitesse variant d'un moment

à l'autre, la force centripète doit varier aussi de manière à être toujours égale à la force centrifuge, sans cela le mobile quitterait la circonférence.

» La formule (2) s'applique au cas général où le mobile parcourt une courbe quelconque ; seulement il faut alors remplacer le rayon R par le *rayon de courbure* de la courbe au point considéré. En effet, le mobile peut être regardé comme parcourant l'arc commun à la courbe et à son cercle osculateur en ce point. La force centrifuge, toujours normale à la courbe, variera d'intensité avec la vitesse et le rayon de courbure, et il faudra que la force qui agit sur le mobile ait une composante centripète qui soit égale à la force centrifuge à chaque instant. »

On sait tous les effets que la physique attribue à la force centrifuge.

D'après mes critiques précédentes, on comprend que je ne puis regarder la théorie des forces centrifuge et centripète comme rigoureuse.

Poisson, dans la partie de son *Traité de Mécanique* relative à la détermination des effets du choc des corps de forme quelconque, attribue aux mobiles un mouvement de rotation, et il fait entrer cet élément dans les équations de son analyse. L'on peut se demander : 1° si le mouvement rotatoire est nécessaire ; 2° qu'elle en est la cause, comment on peut l'expliquer, quand il se produit, dans les différents cas.

Théoriquement du moins, le mouvement rotatoire n'est pas nécessaire. Supposons qu'un corps de forme quelconque soit lancé dans le vide, un vide absolu, par une seule impulsion rectiligne, et qu'aucune autre force n'agisse, n'influe sur ce mobile, il sera projeté en ligne

droite; il ne tournera pas sur lui-même, il n'aura qu'un mouvement de translation.

Mais si nous plaçons une bille sur une table de marbre, par exemple, et donnons à cette bille une seule impulsion parallèlement à la surface de la table, diamétralement à la bille ou un peu au-dessus de la direction diamétrale, ce mobile se mouvra en tournant sur lui-même; il aura simultanément un mouvement de translation et un mouvement de rotation. Pourquoi cela? Pourquoi la bille ne glisse-t-elle pas sur la surface du marbre en restant toujours en contact avec elle par le même point de sa propre surface? Ce phénomène ne peut s'expliquer qu'au moyen de la pesanteur.

Les molécules de la bille, par l'impulsion, sont d'abord animées de vitesses inégales : celles placées dans la direction de l'impulsion l'emportent, sous ce rapport, sur les autres, surtout sur les molécules qui peuvent toucher la table et y sont plus ou moins retenues par la cohésion. En même temps, la pesanteur tend continuellement à les porter vers la surface de la table, et, opérant ainsi principalement sur les molécules moins comprimées, plus libres, situées au delà du centre du côté opposé au point où l'impulsion a eu lieu, leur fait décrire une courbe et imprime ainsi un mouvement de rotation à la bille, au moyen de la cohésion de ses molécules et de son élasticité.

La courbe décrite alors par la bille un peu déformée doit être d'abord irrégulière, mais elle se régularise par la tendance des molécules à se mettre en équilibre, et le mouvement rotatoire se continue, ayant, pour se produire, la vitesse tangentielle de chaque molécule et la force de cohésion qui est exercée sur elle et dont la résultante peut être regardée comme normale à la vitesse tangentielle.

On s'expliquerait de même le mouvement rotatoire des roues d'une charrette, bien que ce véhicule soit tiré en avant ou poussé par derrière en droite ligne, horizontalement, parallèlement au chemin qu'il parcourt. Les molécules de ses roues étant inégalement soumises à cette impulsion, et, en même temps, sollicitées par la pesanteur, il s'ensuit un mouvement de rotation analogue à celui de la bille.

Un frottement à la surface de la bille peut aussi déterminer en elle un mouvement rotatoire : alors ce mouvement résulte de la vitesse tangentielle imprimée par le frottement, de la cohésion moléculaire et de l'élasticité.

On admet, il est reconnu qu'un boulet lancé décrit une courbe, une parabole, et ce mouvement doit résulter de la pesanteur du boulet et de la force de projection qui lui est imprimée. On admet aussi que le projectile tourne sur lui-même, exécute une succession de mouvements rotatoires pendant son trajet, et, pour expliquer cet effet, il faut encore attribuer un rôle à la pesanteur qui, sous ce rapport, opère alors sur le boulet comme elle opère sur la bille dans le premier exemple que j'ai présenté, avec le concours de la cohésion et de l'élasticité.

Si un corps tourne sur un axe fixe, c'est que plusieurs de ses molécules ont reçu, dans une direction excentrique, une impulsion tendant à les éloigner de l'axe fixe, et que cet axe tend au contraire à les retenir.

Je le répète, un corps qui serait de forme absolument invariable, qui ne serait pas formé de parties distinctes, séparées, individuellement mobiles, ne pourrait avoir un mouvement de rotation, tourner sur lui-même. Conséquemment, les parties élémentaires d'un corps ne peuvent tourner sur elles-mêmes.

Dans le chapitre où je traiterai de la Mécanique céleste, je présenterai une hypothèse qui explique le mouvement de rotation du soleil et des planètes, en même temps que leur mouvement de translation.

CHAPITRE XIII

DU PENDULE

En général, on définit le pendule en disant que c'est un corps solide, mobile autour d'un axe horizontal qui ne passe pas par son centre de gravité, de sorte que si la position du corps est telle que la verticale qui passe par ce centre rencontre l'axe de suspension, le corps est en équilibre, et que, si on le dérange de cette position, il exécute, sous l'influence de la pesanteur, de part et d'autre de la position d'équilibre, des mouvements alternatifs.

L'on distingue le pendule simple et le pendule composé.

Le premier, purement idéal, consisterait en un point matériel pesant, suspendu à un point fixe, au moyen d'un fil sans masse ni poids, inextensible et parfaitement flexible.

Pour établir la théorie de ce pendule, on a présenté ce raisonnement :

« Soit OA (fig. 68) un pendule simple en équilibre. Amenons-le dans la position OB ; la pesanteur B*g*, agissant en B, pourra être décomposée en deux forces, l'une suivant le prolongement de OB, détruite par la résis-

tance du fil; l'autre suivant Bb perpendiculaire à OB, qui tendrait à ramener le pendule à la position d'équilibre. Cette dernière composante est égale à $g \sin \alpha$, en appelant α l'angle BOA $= bg$B. On voit qu'elle diminue avec l'angle α, c'est-à-dire à mesure que le pendule se rapproche de la position d'équilibre OA, pour laquelle cette composante est nulle. Le mouvement accéléré qui se produit est donc dû à une force continue, mais non constante.

» Arrivé dans la position verticale, le pendule la dépasse en vertu de la vitesse acquise, et remonte de A en B' avec un mouvement retardé; car la composante de la pesanteur tangente à l'arc décrit, est alors dirigée en sens contraire du mouvement. Comme tout est symétrique de part et d'autre de la verticale, cette composante diminue la vitesse en chaque point de l'arc AB' d'une quantité égale à celle dont elle l'avait augmenté aux points de l'arc BA situés à égale distance du point A; de sorte que la vitesse ne sera complétement détruite que l'orsque le pendule aura parcouru l'arc AB' égal à AB. Arrivé en B', il y aura un moment imperceptible de repos, après lequel le pendule retournera sur ses pas pour remonter en B, revenir de nouveau en B', et ainsi de suite indéfiniment, en supposant qu'il n'y ait aucune résistance. »

Chacun des mouvements de B en B' ou de B' en B (même figure) s'appelle une oscillation. On nomme *amplitude* de l'oscillation, l'angle BOB' ou l'arc BAB' qui le mesure.

On admet non-seulement que les oscillations résultant d'un même écart primitif s'accomplissent dans un même temps, sont *isochrones*, mais encore que ce temps reste

encore le même quand on change l'amplitude, *pourvu qu'elle soit infiniment petite*; et qu'il reste sensiblement le même, quand l'amplitude est très-petite, quand elle est de trois ou quatre degrés, par exemple.

Pour se rendre compte de l'isochronisme, on suppose deux amplitudes appartenant à deux pendules égaux et assez petites pour qu'on puisse prendre l'arc pour son sinus. « Supposons, dit-on, ces amplitudes différentes, doubles l'une de l'autre, par exemple. La composante de la pesanteur perpendiculaire au pendule sera α, puisque l'angle α se confond avec sin. α. Divisons les deux amplitudes en un nombre égal de parties infiniment petites, telles qu'on puisse les considérer comme parcourues d'un mouvement uniforme. Ces parties seront, dans l'un des axes, doubles de ce qu'elles sont dans l'autre; mais les composantes, qui sont proportionnelles à α, c'est-à-dire aux distances au point le plus bas comptées sur l'arc, sont aussi doubles pour deux subdivisions de même rang; les temps employés à parcourir d'un mouvement uniforme ces subdivisions sont donc les mêmes; et, par suite, les temps employés à parcourir l'amplitude entière. »

On juge que les propriétés du pendule, dans le cas de l'amplitude infiniment petite, sont renfermées dans la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

dans laquelle t représente la durée de l'oscillation, l la longueur du pendule, π le rapport de la circonférence au diamètre, égale à 3, 1416, et g l'intensité de la pesanteur. D'après cette formule, *la durée de l'oscillation* ne

dépend pas de l'amplitude; elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur divisée par la pesanteur.

On est parvenu à cette formule par divers procédés, notamment par celui que je vais reproduire.

On a d'abord calculé la vitesse du point B (fig. 69) à une distance donnée $Am = x$ du point le plus bas. L'amplitude étant supposée infiniment petite, on a conçu l'arc Bm comme se confondant avec sa corde, et jugeant que le mobile arrive en m avec la vitesse qu'il aurait acquise en tombant perpendiculairement de B en D, on a trouvé, pour l'expression de cette vitesse,

$$V = \sqrt{2g \times BD}.$$

D'autre part, on a

$$BD = bd = bA - dA,$$

et, la corde étant moyenne proportionnelle entre le diamètre et sa projection sur le diamètre, on a aussi

$$dA = \frac{\overline{Am}^2}{2AO} = \frac{x^2}{2l}, \text{ et } bA = \frac{a^2}{2l},$$

en désignant par a l'arc AB. La valeur de V devient donc

$$V = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)}; \text{ et pour le point A, } V_1 = a\sqrt{\frac{g}{l}},$$

en posant $x = o$. Au point B, on a $x = a$, d'où $V = o$.

Cela posé, prenons sur une ligne droite une longueur $B_1 B'_1$ (fig. 70) égale à BAB' (fig. 69); décrivons une demi-circonférence sur cette longueur comme diamètre, et supposons qu'un mobile parcoure l'arc $A_1 AB'_1$ (fig. 70)

avec une vitesse uniforme $V_1 = a\sqrt{\frac{g}{l}}$. La projection sur $B_1B'_1$ de ce mobile possédera un mouvement varié, et la vitesse de cette projection, à une même distance x du point A_1, sera égale à la vitesse du pendule sur l'arc BAB′ (fig. 69), à une même distance x du point A.

« En effet, dit-on, soit M une position du mobile, et m_1 sa projection située à une distance $m_1A_1 = x$ du point milieu A_1. Pendant que le mobile parcourt un espace infiniment petit MM′, sa projection parcourt pendant le même temps l'espace infiniment petit $m_1m'_1$, d'un mouvement qui doit être regardé comme uniforme, le temps étant infiniment petit. La vitesse V_1 du mobile et celle, y, de sa projection, sont donc entre elles comme les espaces MM′ et $m'_1m_1 = Mp$; on a donc

$$y : V_1 = Mp : MM' ; \text{ on a aussi } Mp : MM' = Mm_1 : MA_1 = \sqrt{a^2 - x^2} : a,$$

dans les triangles semblables $M'pM$, Am_1M ; $a = MA_1$ étant la demi-amplitude. En combinant ces deux proportions, et remplaçant V_1 par sa valeur $a\sqrt{\frac{g}{l}}$, on trouve $y = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)}$, qui est précisément la vitesse du pendule à une distance x du point le plus bas.

» Le temps t que met le pendule à accomplir une oscillation est donc égal à celui que met la projection à aller de B_1 en B'_1, c'est-à-dire au temps que met le mobile considéré, à parcourir l'arc $B'AB'_1$ avec la vitesse constante V_1. Ce temps t, sera donné par la formule du

mouvement uniforme $e = vt$, d'où $t = \frac{e}{v}$. Or, ici, on a

$$e = \pi a, v = V_1 = a \sqrt{\frac{g}{l}}; \text{ donc } t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

» Quand l'amplitude n'est pas infiniment petite, mais seulement très-petite, la durée de l'oscillation augmente avec l'amplitude, et on démontre en mécanique qu'elle est donnée approximativement par la formule.

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{a}{2}\right); \text{ ou } t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{a^2}{16}\right),$$

en prenant l'arc à la place de son sinus.»

Le pendule composé, comme on sait, est formé d'un fil supportant une masse en forme de lentille pour fendre plus facilement l'air. La suspension est formée soit par l'arête légèrement arrondie d'un prisme en acier, nommé couteau, reposant sur un plan horizontal en acier ou en agathe, soit par une lame métallique très-flexible qui se trouve pincée suivant une ligne horizontale dans une sorte d'étau fixe.

Toutes ces spéculations-là ne sont point rigoureusement vraies; car l'infiniment petit est chimérique, et, si petit que soit un arc, il ne peut être égal à son sinus.

Pour expliquer les oscillations du pendule, il n'est point exact, après avoir décomposé la pesanteur Bg, agissant en B (fig. 68) en deux forces, l'une suivant le prolongement de OB, l'autre suivant Bb perpendiculaire à OB, de ne tenir aucun compte de la première, en la considérant comme détruite par la résistance du fil, du point fixe. Cette composante doit avoir quelque part dans l'action, dans le phénomène; elle n'est pas détruite par

le point fixe, en ce sens que le pendule soit libre, comme le serait un corps soumis à deux forces directement opposées. Seulement, le fil étant supposé absolument inextensible, le point auquel il est fixé doit empêcher que la composante suivant OB puisse l'entraîner dans sa direction. S'il était vrai que la composante suivant OB fût ici de nul effet, il s'ensuivrait qu'on pourrait, sans rien changer, appliquer une force quelconque suivant cette direction. Or je ne saurais souscrire à une conséquence si étrange. Je crois, au contraire, que cette force pourrait être assez considérable pour que le pendule restât sensiblement en repos dans la direction dont il s'agit. Supposons qu'il soit appliqué, attaché à deux points fixes, au point de suspension O et au point B. Dans l'hypothèse où les corps sont des composés de molécules à distance les unes des autres, retenues par leur cohésion mutuelle, le pendule ne serait attaché aux deux points fixes que par la cohésion, qu'en ce sens que les molécules de ses extrémités seraient retenues à leur place par la cohésion ou attraction existante entre elles et les molécules des points fixes. Or cette cohésion ou attraction doit pouvoir être remplacée par une force égale agissant dans le même sens. Si donc le pendule, déjà retenu par un point fixe de suspension, recevait, dans la direction OB, une impulsion ou une attraction tendant à l'éloigner du point de suspension, rien n'empêcherait de supposer cette force assez grande pour le fixer sur OB, comme si son extrémité A était retenue par un point fixe ; et, si elle n'était pas assez grande pour cela, elle tendrait toujours plus ou moins à retarder le mouvement que toute autre force tendrait à lui donner dans une autre direction.

Même, dans le cas impossible du pendule simple, où le fil est supposé sans masse ni poids, le point matériel qui lui serait attaché et qui constituerait le poids pourrait être soumis à une force, soit d'impulsion, soit d'attraction, telle qu'il resterait sensiblement en repos, fixé au point B, comme je viens de l'expliquer, et une force quelconque, dans la même direction OB, devrait logiquement avoir quelque influence sur le mouvement qu'il prendrait, s'il pouvait en avoir un en ce cas.

Au reste, supposer que le fil est absolument inextensible, c'est lui enlever la faculté de tourner sur le point fixe auquel il est suspendu. Un fil inextensible ne saurait être flexible. Pour être flexible, il devrait être composé de parties à distance les unes des autres, et, en ce cas, il ne serait pas inextensible. Son inextensibilité supposée exclut la rotation, le mouvement oscillatoire qu'on attribue au pendule.

En réalité, le fil d'un pendule n'est point inextensible, et c'est ce qui explique qu'il puisse osciller autour de l'axe de suspension. Quand le pendule est éloigné de la position de repos OA, lorsqu'il est en OB, par exemple (fig. 68), pour concevoir qu'il puisse revenir dans la position OA, il faut admettre que le fil s'allonge et se courbe par l'effet de la traction opérée par le poids, c'est-à-dire dans le sens normal. Il n'y a pas vraiment lieu de décomposer cette force normale en deux autres, comme on le fait, car il faudrait toujours venir à attribuer une part d'action à toutes les composantes qu'on y concevrait.

Lorsque le pendule est dans la situation normale, c'est-à-dire au point le plus bas de sa rotation, c'est le moment où le poids agit le plus sur lui, et où, par suite,

il doit être le plus capable de résister à l'impulsion qui lui serait donnée dans un autre sens que de haut en bas. Au contraire, quand le pendule est dans une autre position, le poids tend à le faire revenir à la position verticale, et il est visible que plus le poids sera fort, plus sera grande la tendance du pendule à y revenir; tandis que, au contraire, plus sera grande sa tendance à rester dans la position verticale quand il y sera en repos.

On voit que les expériences du pendule, au moyen desquelles on a prétendu démontrer que la réaction est toujours égale à l'action, dans le choc des corps, ne peuvent être concluantes; et j'ai montré précédemment que, théoriquement, cette égalité, supposée absolue, n'est pas admissible.

On admet ce qu'on appelle le *centre d'oscillation;* on a dit :

« Les points du pendule composé les plus rapprochés de l'axe de suspension, tendant à osciller plus vite que ceux qui en sont plus éloignés, le mouvement commun de tous ces points sera intermédiaire entre celui qui convient aux plus rapprochés et celui qui convient aux plus éloignés de l'axe; de sorte que les premiers oscillent plus lentement, et les derniers plus rapidement que s'ils étaient libres. De plus le ralentissement du mouvement des uns, et l'accélération de celui des autres, sont d'autant moins marqués que ces points sont plus éloignés des deux extrémités. Il y a donc entre les points qui oscillent trop vite et ceux qui oscillent trop lentement une ligne droite parallèle à l'axe, où se fera le passage des uns aux autres, et dont tous les points oscillent comme s'ils étaient libres. Cette droite se nomme *axe d'oscillation;* le point où elle coupe le plan

vertical perpendiculaire à l'axe de suspension passant par le centre de gravité du pendule s'appelle *centre d'oscillation*, et la distance de l'axe d'oscillation à l'axe de suspension, *longueur d'oscillation.* » L'on en a conclu qu'un *pendule composé* est *synchrone* avec le *pendule simple* dont la longueur serait égale à la longueur d'oscillation ; qu'ainsi on peut appliquer la formule du pendule simple au pendule composé, en y mettant à la place de l, la *longueur d'oscillation.*

Je ne regarde point comme exacte, comme rigoureuse, cette spéculation sur l'axe et le centre d'oscillation ; je conteste le raisonnement que je viens de reproduire, et je ne vois pas qu'il doive y avoir dans le pendule composé un point central qui oscille exactement comme s'il était libre.

La haute analyse s'est appliquée à la détermination des principes et de la formule du pendule ; mais je ne vois pas l'utilité de reproduire ici ces calculs. Là aussi, l'on conçoit la pesanteur comme entièrement détruite par le point de suspension lorsque le pendule est vertical, et comme décomposé, dans les autres positions, en deux forces, l'une sur le prolongement du pendule, qui serait totalement détruite par la résistance du fil ou point fixe, et l'autre suivant une perpendiculaire au pendule.

Au reste, cette analyse ne peut être exacte, car on y considère une courbe comme formée de droites infiniment petites, certaines aires comme des infiniments petits du second ordre, qu'on néglige à ce titre ; on y regarde des aires curvilignes comme des triangles rectilignes, à cause de leur petitesse.

CHAPITRE XIV

DE L'HYDROSTATIQUE

L'hydrostatique est généralement définie : la partie de la statique qui traite de l'équilibre des fluides. Un fluide y est regardé comme un amas ou assemblage de points matériels, de molécules cédant au moindre effort tendant à les séparer les unes les autres. Les fluides approchent plus ou moins de cet état ; il existe entre leurs molécules une certaine adhérence, qu'on nomme *viscosité* et qui s'oppose plus ou moins à leur séparation, mais on admet que l'on peut généralement sans erreur sensible ne pas tenir compte de cet obstacle dans l'application des lois de l'équilibre auxquelles on est parvenu.

On distingue deux sortes de fluides, les liquides et les gaz ou *fluides aériformes*. L'air et les gaz sont des *fluides permanents* par opposition aux vapeurs, mais on pense qu'ils pourraient être liquéfiés par une très-grande pression ou par un très-grand refroidissement, ce qui d'ailleurs a été vérifié pour plusieurs d'entre eux. Les fluides aériformes sont compressibles et doués d'une très-grande élasticité, et, à ce point de vue, on les nomme aussi *fluides élastiques*. Les liquides, ne se com-

primant sensiblement que sous des pressions très-considérables, sont aussi nommés *fluides incompressibles*.

Il est admis que quand un fluide contenu dans un vase ouvert ou fermé de toutes parts est en équilibre sous l'action de forces quelconques, il exerce une pression sur chaque portion des parois du vase qui le contient, et que cette pression peut varier d'un point à un autre. Or, pour la définir et la mesurer, on considère un point M de la surface du vase et une portion *infiniment petite* ω de cette surface comprenant ce point M. Le fluide, dit-on, exerce sur cette petite surface ω certaines actions dont la résultante peut être représentée par $p\omega$, si l'on imagine une aire plane égale à l'unité de surface et dont tous les éléments égaux à ω supportent la même pression que ω. La quantité p est ce qu'on appelle *la pression du point* M. On dit encore que la pression au point M est la limite du rapport de la pression exercée sur l'élément ω qui comprend le point M à l'aire ω, quand cette aire ω tend vers zéro en comprenant toujours le point M.

On attribue aux fluides la faculté de transmettre également, en tous sens, les pressions exercées à leurs sur faces. Supposons, par exemple, qu'un vase prismatique droit et posé sur un plan horizontal, dont ABCD (fig. 71) représente une section verticale, soit rempli d'eau jusqu'en EF, et qu'on recouvre cette eau d'un piston horizontal fermant exactement le vase. Faisons abstraction de la pesanteur de l'eau, de sorte que ce fluide n'exerce par lui-même aucune pression sur les parois du vase, et posons sur le piston un poids donné P, y compris le poids du piston. On dit que la base horizontale du prisme sera pressée de la même manière que si le poids P était posé immédiatement sur cette base, et qu'il fût dis-

tribué uniformément sur toute son étendue; que tous ses points éprouveront des pressions verticales égales entre elles; qu'ainsi la pression qui en résultera, pour une portion quelconque α de cette base, sera proportionnelle à α, et qu'elle équivaudra à une force verticale appliquée au centre de gravité de l'aire α et exprimée par $\frac{P\alpha}{a}$, en désignant par a l'aire de la base du prisme, qui est aussi celle de la base du piston en contact avec le liquide. Or, d'après le principe de l'égalité de pression en tous sens, la pression que le poids P exerce à la partie supérieure de l'eau se transmet, par l'intermédiaire du fluide, non-seulement sur la base du vase, mais encore sur ses faces latérales, tous les points étant, dit-on, également pressés dans des directions perpendiculaires aux parois, et une aire α, prise sur une des faces latérales du prisme, éprouvant la même pression $\frac{P\alpha}{a}$ que si elle faisait partie de sa base horizontale.

Quelle que soit la forme du vase, s'il est fermé de toutes parts et fixement attaché, et qu'il soit rempli exactement d'un liquide supposé sans pesanteur; si l'on enlève une face de ce vase et qu'on la remplace par un piston auquel on applique une force donnée P perpendiculaire à la surface du liquide adjacent, le vase et le liquide demeureront en repos, et, d'après le principe dont il s'agit, l'on admet que la pression exercée par la force P sur la surface adjacente se transmet, par l'intermédiaire du liquide, sur toutes les faces du vase; que tous les points du vase, en y comprenant *les points de la base du piston*, seront également pressés de *dedans en dehors* suivant les directions perpendiculaires aux parois;

et que relativement à une aire α, prise sur une de ces parois, *ou sur la surface du piston*, la pression sera une force perpendiculaire à son plan, appliquée à son centre de gravité et égale à $\frac{P\alpha}{a}$, a étant l'aire entière de la base du piston, en contact avec le liquide.

On professe que cette pression s'exerce de la même manière dans l'intérieur du liquide ; que, si l'on y considère une portion intérieure du liquide terminée par des surfaces planes, ou un polyèdre solide qui y soit plongé, chaque partie α de l'une des faces éprouvera aussi *de dehors en dedans* la pression normale égale à $\frac{P\alpha}{a}$; et si l'on considère une surface infiniment petite ω passant par un point M pris à volonté dans le fluide, la pression exercée par le fluide sur chaque face de l'élément ω sera toujours la même, quelle que soit la position que l'on donne à l'élément ω, en le faisant tourner autour du point M.

Pour démontrer ce principe, on a raisonne ainsi :

« Faisons passer par le point M (fig. 72) deux plans quelconques ; prenons sur leur intersection une longueur MN très-petite, et menons dans ces plans perpendiculairement à leur intersection les quatre droites MI, NK, MI', NK' égales à la longueur MN. Il s'agit de démontrer l'égalité des pressions p et p' rapportées à l'unité de surface que le fluide exerce sur les surfaces planes égales MIKN, MI'K'N.

» La masse fluide contenue dans le prisme droit MII'NKK' sera encore en équilibre si on la suppose solidifiée. Les pressions que le fluide extérieur exerce contre les cinq faces de ce prisme, perpendiculairement à

ces faces, font équilibre aux forces (analogues à la pesanteur) qui sollicitent toutes les molécules intérieures. Donc la somme de leurs composantes parallèles à un axe quelconque est nulle.

» Menons par le point M un axe ML parallèle à la droite II'. Le fluide exerce sur les deux surfaces planes MIKN et MI'K'N, que nous désignerons par ω et ω' et qui sont égales, des pressions $p\omega$, $p'\omega'$ dont les composantes suivant l'axe ML sont $p\omega \cos \alpha$ et $p'\omega' \cos \alpha'$; α et α' désignant les angles que les normales à ces deux plans ou aux droites MI, MI' font avec ML. Ces angles sont suppléments l'un de l'autre. Les pressions normales aux autres faces MII', NKK' et IKK'I' ont leurs directions perpendiculaires à ML, et par conséquent ne donnent pas de composantes suivant cette droite. Quant aux forces qui agissent sur les molécules intérieures, si l'on désigne par X la somme de leurs composantes parallèles à ML, la somme de toutes ces composantes devant être nulle, on a

$$p\omega \cos \alpha + p\omega' \cos \alpha' + X = o$$

ou

$$(1) \qquad (p - p') \cos \alpha + \frac{X}{\omega} = o,$$

à cause de

$$\omega = \omega', \ \cos \alpha = - \cos \alpha'.$$

» Si la longueur MN diminue indéfiniment, ω décroît comme le carré de MN et X décroît à très-peu près comme le volume du prisme ou proportionnellement au

cube de MN. Donc $\frac{X}{\omega}$ tend vers zéro; d'ailleurs cos α est constant. Donc p et p' tendent vers l'égalité quand les surfaces ω et ω' tendent vers zéro. D'ailleurs cos α est constant; les valeurs de $p = p'$ tendent vers des limites déterminées qui, d'après l'équation, doivent être égales; de sorte qu'on a $p = p'$, quand les surfaces égales ω, ω' deviennent infiniment petites. »

Si le liquide est plus ou moins visqueux, on admet encore la propriété de presser également en tous sens. On professe que la pression ne se transmet pas latéralement avec la même rapidité que suivant la direction même de la force P; mais qu'après un temps convenable, la pression latérale devient égale à la pression directe, et que c'est à cet instant qu'il faut considérer l'équilibre du liquide.

Si le liquide contenu dans un vase est considéré comme pesant, il doit, dit-on, transmettre les pressions exercées à sa surface, de la même manière que s'il était dénué de pesanteur, mais il exerce en outre sur les parois du vase une pression due à son poids et variable d'un point à un autre. On décide qu'il en est de même à l'égard d'un liquide dont les points sont sollicités par la pesanteur et par d'autres forces données, et qui demeure en équilibre dans un vase. Si les parois du vase sont nécessaires à l'équilibre, en sorte qu'on n'y puisse pas faire une ouverture sans que le liquide ne s'échappe aussitôt, on en conclut que les parois éprouvent, en chaque point, une pression particulière, dirigée de dedans en dehors, suivant une normale à la surface du vase; car, dit-on, ce n'est que suivant cette direction qu'une surface peut empêcher de se mouvoir un point

matériel en contact avec elle, et déterminer, par sa résistance, la force motrice de ce mobile.

L'on ajoute que la même chose a lieu dans l'intérieur du liquide, soit sur des portions du liquide même, soit sur des corps qui y sont plongés. La pression en un point quelconque est, d'après cela, une quantité inconnue qui dépend de la position de ce point et des forces motrices appliquées au fluide. Changeant, en général, d'un point à un autre, on ne la suppose rigoureusement constante que dans une étendue infiniment petite; or, pour mesurer la pression exercée sur un élément déterminé d'une surface, on conçoit une aire plane, que l'on prend pour unité, et qui éprouve dans toute son étendue la même pression que cet élément : p étant la pression totale que cette aire supporte, et ω l'étendue infiniment petite de cet élément, le produit $p\omega$ est la pression correspondante de cet élément et normale à la surface dont il fait partie; le coefficient p est une fonction des coordonnées de ce même élément, que l'on appelle la *pression rapportée à l'unité de surface.*

L'on admet que le principe d'égalité de pression en tous sens convient aux fluides élastiques comme aux liquides; mais que, relativement aux premiers, il n'est pas nécessaire que des forces motrices agissent sur leurs molécules, ou que des pressions soient exercées sur leurs surfaces pour qu'ils pressent eux-mêmes les parois des vases qui les contiennent; que, pour cela, leur élasticité suffit, parce que, en vertu de leur élasticité, ces fluides font continuellement effort pour occuper un plus grand volume; qu'ainsi, en supposant qu'une masse d'air, d'un gaz ou d'une vapeur soit contenue dans un vase fermé de toutes parts, et qu'on fasse

abstraction de la pesanteur du fluide, les parois du vase éprouveront des pressions égales en tous leurs points, et dirigées de dedans en dehors, suivant les normales à ces parois.

Pour traiter la question de l'équilibre des fluides de la manière la plus générale, on a raisonné ainsi :

« Considérons une masse fluide ABCD (fig. 73) homogène ou hétérogène, compressible ou incompressible, dont tous les points matériels sont sollicités par des forces données, et proposons-nous d'exprimer par des équations les conditions de son équilibre.

» Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque m de cette masse, parallèles aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ; nous supposerons, pour fixer les idées, le plan des x et y horizontal, l'axe Oz dirigé dans le sens de la pesanteur, et la masse ABCD comprise au-dessous du plan des x et y, dans l'angle trièdre des trois plans des coordonnées positives. Partageons la masse fluide en parties que nous traiterons comme des éléments infiniment petits ; supposons ces éléments compris entre des plans infiniment rapprochés l'un de l'autre et parallèles à ceux des coordonnées; de sorte que ces éléments soient des parallélipipèdes rectangles, dont les côtés adjacents seront parallèles aux axes et égaux aux différentielles des coordonnées : les deux bases horizontales de celui qui répond au point quelconque m, et qui est représenté dans la figure, seront égales à $dxdy$; il aura dz pour sa hauteur verticale mc et $dxdydz$ pour son volume.

» En appelant ρ, la densité du fluide en ce point m, et désignant par dm l'élément différentiel de la masse correspondant à ce même point, on aura donc

$$dm = \rho\, dxdydz.$$

» Le facteur ρ sera une quantité constante dans les liquides homogènes, abstraction faite des petites compressions qu'ils éprouveront et qui pourront être inégales en des points différents ; ρ sera une fonction connue ou inconnue des coordonnées x, y, z dans les liquides hétérogènes, et dans les fluides élastiques qui ne seront pas partout également comprimés.

» Soient aussi Xdm, Ydm, Zdm les composantes parallèles aux axes des x, y, z de la force motrice donnée qui agit sur l'élément dm, de sorte que X, Y, Z, soient les composantes de cette force rapportée à l'unité de masse, ou de la force accélératrice relative au point m. Chacune de ces trois quantités sera une fonction de x, y, z, dont on regardera les valeurs comme positives ou comme négatives, selon que la force qu'elle représente tendra à augmenter ou à diminuer la coordonnée à laquelle elle est parallèle. L'élément dm sera, en outre, pressé de dehors en dedans sur ses six faces, par le fluide environnant ; et pour qu'il demeure en repos, ces pressions extérieures devront faire équilibre aux forces intérieures Xdm, Ydm, Zdm.

» Cela étant, désignons par $pdxdy$, la pression verticale qui s'exerce sur la base supérieure $dxdy$, dans le sens de la pesanteur, de manière que p exprime la pression rapportée à l'unité de surface, qui répond à cette base infiniment petite. Cette quantité p sera une fonction inconnue des coordonnées x, y, z ; au point M', dont les coordonnées sont x, y, $z + dz$, elle deviendra $p + \frac{dp}{dz}dz$, et elle exprimera la pression verticale, rapportée

à l'unité de surface et relative à la base inférieure de dm. Cette seconde base éprouvera donc, dans le sens de la pesanteur, une pression égale à $(p + \frac{dp}{dz} dz)\, dxdy$; la résistance du fluide sur lequel l'élément dm est appuyé, sera une force égale et contraire à cette pression ; en sorte que cet élément sera poussé verticalement par les deux forces contraires $pdxdy$ et $(p + \frac{dp}{dz} dz)\, dxdy$, ou par une force égale à leur différence $\frac{dp}{dz}\, dxdydz$ et dirigée *du bas en haut*. Or, pour que cet élément dm ne s'élève ni ne s'abaisse, il faudra que cette force soit égale à la composante verticale Zdm de la force motrice, qui agit *dans le sens opposé ;* par conséquent on aura d'abord

$$\frac{dp}{dz}\, dxdydz = Zdm.$$

On trouvera de même les équations

$$\frac{dq}{dy}\, dxdydz = Ydm, \quad \frac{dr}{dx}\, dxdydz = Xdm,$$

qui seront nécessaires pour que l'élément dm ne se meuve ni dans le sens des y, ni dans le sens des x, et dans lesquelles q et r représentent les pressions rapportées à l'unité de surface, qui répondent aux faces de dm, parallèles aux plans des x et z et des y et z, et les plus voisines de ces plans. En substituant, dans ces trois équations, la valeur précédente de dm, et supprimant le facteur commun $dxdydz$, elles deviennent

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z, \frac{dq}{dy} = \rho Y, \frac{dr}{dx} = \rho X \qquad (1).$$

Ces spéculations de l'hydrostatique que je viens de reproduire ne sont pas rationnelles à divers points de vue.

Premièrement. L'on ne peut admettre dans un espace fini une infinité de parties égales, si petites qu'elles soient: l'infiniment petit est inadmissible, et pourtant l'on en use largement dans les analyses dont il s'agit.

Secondement. Le principe, que la pression exercée sur un fluide se transmet dans tous les sens, de manière qu'elle s'exerce également sur les parois d'un vase contenant ce fluide, n'est point rigoureusement établi. Sans doute, dans la réalité, il y a quelque différence, des inégalités entre les pressions produites alors sur les diverses parois. Pour le voir, il suffit de se reporter à ce que j'ai dit sur la constitution des corps.

Troisièmement. A vrai dire, les liquides ne sont pas incompressibles; ils doivent être plus ou moins compressibles; autrement, étant formés de molécules à distance les unes des autres, je ne m'expliquerais pas que leurs poids soient en raison de leurs quantités de matière, de leurs masses. Cela se conçoit, au contraire, si leurs molécules peuvent cesser de garder entre elles la même distance, ainsi que je l'ai expliqué en traitant de la gravité et du poids des corps. Dans le cas d'un liquide placé dans un vase, les molécules de ce liquide, par l'effet de la pesanteur, sont un peu plus rapprochées les unes des autres vers la base inférieure du vase que vers sa partie supérieure.

A un autre point de vue, il faut bien que les liquides

soient plus ou moins compressibles. On admet, en effet, que la pression d'un liquide se transmet, même latéralement à la direction de la pression, aux parois du vase qui le contient. Or cela serait incompréhensible, dans l'hypothèse d'une incompressibilité absolue. Supposons qu'un liquide contenu dans un vase cylindrique ou prismatique soit comprimé à sa surface par un piston fermant hermétiquement le vase, et animé d'une force P dirigée perpendiculairement à la surface pressée. Si le liquide est supposé incompressible, on conçoit encore que la pression se transmette suivant la direction de P; mais il n'est pas concevable que, dans la même hypothèse, la pression soit transmise aux parois latérales du vase.

On a voulu démontrer que les trois quantités p, q, r, qui figurent dans les équations (1), doivent être égales entre elles, qu'il ne peut exister entre elles qu'une différence infiniment petite, négligeable dans ces équations.

« En effet, a-t-on dit, la pression que le fluide environnant exerce sur chacune des faces du parallélipipède $dxdydz$, se transmet sur les autres faces, par l'intermédiaire du fluide, dont l'élément dm est composé; cette transmission se fait de la manière que l'on a expliquée précédemment, et d'où il résulte qu'ayant appelé $pdxdy$ la pression qui a lieu de dehors en dedans sur la base horizontale supérieure, il faudra représenter, en même temps, par $pdxdz$ et $pdydz$, les pressions transmises sur les faces latérales, et qui s'exerceront de dedans en dehors; de plus, à ces pressions transmises, il faudra ajouter celles qui résultent de la force motrice du fluide dm; par conséquent, si l'on appelle γ la pression due à cette

force, et exercée, par exemple, sur la face $dydz$, la plus voisine du plan des y et z, on aura $pdydz + \gamma$ pour la pression totale, qui a lieu de dedans en dehors, ou de droite à gauche sur cette même face. D'un autre côté, la pression provenant du fluide environnant, et exercée de dehors en dedans, ou de gauche à droite, sur cette face $dydz$, a été représentée par $rdydz$; cette force est la résistance que le fluide environnant oppose à la pression intérieure $pdydz + \gamma$; par conséquent il faut qu'on ait

$$rdydz = pdydz + \gamma.$$

» Or, quoique la valeur de γ soit inconnue, nous sommes certain, néanmoins, que cette quantité ne peut être qu'un infiniment petit du troisième ordre, comme la force motrice de dm, dont elle provient; en négligeant donc γ par rapport à $pdydz$, nous aurons $r = p$; et l'on prouvera de même que l'on doit aussi avoir $q = p$. »

Mais cette argumentation, entachée d'infiniment petit, ne peut être rigoureuse.

Appliquant cette solution à un élément quelconque dm, présentant la forme d'un polyèdre quelconque dont toutes les dimensions seraient *infiniment petites*, on conclut que tous les éléments de surface qui passent par le point m éprouvent une même pression rapportée à l'unité de surface, et que si ω est l'aire de l'un d'entre eux, la pression normale qu'il supporte, sur l'un ou sur l'autre de ses deux côtés, est égale à $p\omega$, quelle que soit la direction du plan auquel il appartient. Or, d'après la condition $r = q = p$, les équations (1) deviennent

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \frac{dp}{dy} = \rho Y, \frac{dp}{dz} = \rho Z, \qquad (2)$$

et, ainsi converties, elles constituent ce qu'on appelle les équations générales de l'hydrostatique.

En les ajoutant, après les avoir multipliées par dx, dy, dz, on a obtenu

$$dp = \rho\,(X dx + Y dy + Z dz)\,; \qquad (3)$$

d'où l'on a conclu que la valeur de p n'est possible qu'à la condition que le produit de ρ et de la formule $X dx + Y dy + Z dz$, soit une différentielle exacte d'une fonction de trois variables indépendantes x, y, z; et qu'en mettant dans cette valeur de p ainsi obtenue, les coordonnées d'un point quelconque de la surface de ABCD, on obtiendra la pression qui aura lieu en ce point sur la paroi du vase contenant la masse fluide ; pression qui sera toujours détruite, si cette paroi est fixe et indéfiniment résistante ; mais que, dans les endroits où le vase est ouvert, et où le fluide est entièrement libre, rien ne pouvant détruire la pression p, il faudra que sa valeur soit nulle, pour tous les points de la surface libre d'une masse libre en équilibre ; ce qui donnera

$$X dx + Y dy + Z dz = o \qquad (4)$$

pour l'équation différentielle de cette surface.

De l'équation (4) on tire cette conséquence, que la résultante des forces accélératrices X, Y, Z, qui agissent sur chaque point d'un liquide en équilibre, appartenant à sa surface libre, est perpendiculaire à cette surface, soit qu'il n'y ait aucune pression extérieure, soit qu'on exerce à cette surface une pression constante d'un point à un autre. Pour le montrer, on suppose qu'une courbe quelconque soit tracée sur la surface libre, et en appe-

lant ds l'élément différentiel de cette courbe, correspondant au point dont les coordonnées sont x, y, z, on regarde $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ comme les cosinus des angles que la tangente à cette courbe en ce même point, fait avec des parallèles aux axes des coordonnées. En appelant R la résultante des forces X, Y, Z, les cosinus des angles que sa direction fait avec ces parallèles sont $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, et si l'on divise l'équation (4) par Rds, on a

$$\frac{Xdx}{Rds}+\frac{Ydy}{Rds}+\frac{Zdz}{Rds}=o;$$

résultat qu'on regarde comme une preuve que la direction de la force R, et la tangente à la courbe qu'on a tracée arbitrairement sur la surface, sont perpendiculaires l'une à l'autre, et que, par conséquent, cette direction coïncide avec la normale au point considéré.

Je ferai remarquer que, dans cette analyse, on met en rapport des courbes et des droites, contrairement à la raison, qui proclame qu'il n'y a aucun rapport de quantité entre ces grandeurs essentiellement différentes.

En intégrant l'équation (4), et en donnant à la constante arbitraire de son intégrale autant de valeurs particulières qu'on voudra, les équations déterminées qui en résulteront, appartiendront à autant de surfaces, dont chacune aura l'équation (4) pour équation différentielle, et conséquemment, dit-on, jouira des propriétés d'être également pressée dans toute son étendue et de couper à angle droit, en tous ses points, la résultante des forces

X, Y, Z. On appelle *surfaces de niveau* celles de ces surfaces qui passent dans l'intérieur du fluide selon la valeur de la constante arbitraire. En d'autres termes, une surface de niveau est une surface dont tous les points sont supposés éprouver la même pression.

Une *couche de niveau* est la masse du fluide comprise entre deux surfaces de niveau.

Soit un fluide pesant contenu dans un vase de forme quelconque, tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical Oz. On professe qu'au bout d'un certain temps la masse fluide prend une figure permanente d'équilibre. Pour déterminer cette figure, voici comment on procède :

« Soient X, Y, Z les composantes de la force accélératrice P d'un point quelconque m. La molécule m décrit une circonférence de cercle autour de l'axe Oz, et sa force effective est la force centripète $mr\omega^2$, ω étant la vitesse angulaire et r le rayon du cercle. D'après le principe de d'Alembert, il y aurait constamment équilibre entre les forces motrices et les forces centrifuges de toutes les molécules du fluide, c'est-à-dire que ces forces ne troubleront pas le mouvement commun de rotation uniforme en déplaçant les molécules les unes par rapport aux autres. Donc, en appliquant à l'état d'équilibre actuel l'équation $dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$, et observant que les composantes de la force centrifuge sont $mx\omega^2$, $my\omega^2$ et o, on a

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) + \rho\omega^2 (xdx + ydy).$$

Or, si les forces motrices se réduisent à la pesanteur, on a $X = o$, $Y = o$, $Z = -g$, et il vient

$$dp = -\rho g dz + \rho\omega^2 (xdx + ydy),$$

d'où, en intégrant et représentant la constante par $g\rho C$,

$$(1) \qquad p = g\rho(C - z) + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

En donnant à p des valeurs constantes, on aura différentes surfaces de niveau. Leur équation peut s'écrire

$$(2) \qquad z = C - \frac{p}{g\rho} + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2).$$

Elle représente un paraboloïde de révolution dont la parabole méridienne a pour équation dans le plan des zx

$$z = c - \frac{p}{g\rho} + \frac{\omega^2}{2g}x^2.$$

Cette parabole ne change pas de grandeur avec p, mais la position de son sommet sur l'axe de rotation est variable avec p, car il est à une distance de l'origine égale à $c - \frac{p}{gp}$.»

On conclut que, dans l'espèce, les surfaces de niveau sont toujours des paraboloïdes, quelle que soit la forme du vase, et celle de la surface supérieure qui termine le fluide.

Dans cette démonstration, on invoque le principe de d'Alembert que ma critique a précédemment renversé. D'ailleurs, on se fonde sur une équation qu'on n'a pas justement établie.

Considérant un liquide pesant et incompressible, sou-

mis seulement à l'action de la pesanteur, et prenant les mêmes axes que dans le cas général, on pose

$$dp = g\rho dz,$$

d'où, en intigrant,

$$p = g\rho z + \varpi,$$

ϖ étant une constante, et l'on y voit que la pression, en ce cas, varie seulement avec z, qu'elle croît proportionnellement avec la profondeur, et que les surfaces de niveau sont des plans horizontaux. En faisant $z = o$, on a $p = \varpi$; donc, conclut-on, cette constante représente la pression qui s'exerce sur la surface libre, c'est-à-dire ordinairement la pression atmosphérique.

En posant simplement $p = g\rho z$, on y voit que si b est l'aire de la base supposée horizontale et h la hauteur du liquide, la pression totale P que supporte cette base est

$$P = g\rho bh,$$

ce qui montre, dit-on, qu'elle est égale, quelle que soit la forme du vase, au poids d'un cylindre de liquide dont la base est b et la hauteur h, en sorte qu'elle ne peut être plus grande ou plus petite que le poids total du liquide.

Ces égalités sont contestables. L'on peut contester la première égalité posée, $dp = g\rho dz$, et par suite les intégrales $p = \rho gz$ et $P = g\rho bh$; car, indépendamment du vice résultant ici de l'application de l'infiniment petit, on peut douter que la pression croisse exactement en proportion de la profondeur z, ou de la hauteur h,

comme on l'admet en posant de prime abord $dp = g\rho dz$.

On arrive à décider que si deux liquides sont contenus dans le même vase et qu'ils ne se mélangent pas, leur surface de séparation sera nécessairement un plan horizontal. En effet, dit-on, les surfaces de niveau doivent être des plans horizontaux offrant une même densité dans toute leur étendue, ce qui n'aurait pas lieu si un même plan horizontal pouvait rencontrer les deux liquides.

On calcule comme il suit la pression d'un liquide sur une paroi plane.

« Soient AB (fig. 74) une paroi plane, placée comme on voudra dans le liquide, ω l'aire d'un élément de la surface AB et z la distance de ω au niveau supérieur NN'. La pression que supporte ω est $g\rho z\omega$, en faisant abstraction de la pression atmosphérique. Les pressions exercées par le fluide sur tous les éléments ω étant normales au plan AB, ont une résultante égale à leur somme $g\rho\Sigma z\omega$ et normale au même plan AB. En désignant par b l'aire de la paroi AB et par z_1 la distance de son centre de gravité au plan NN', on a $\Sigma z\omega = bz_1$. Donc la pression totale sur la paroi AB est égale à $g\rho bz$, c'est-à-dire égale au poids d'un cylindre de liquide qui aurait une base égale à la surface de la paroi et une hauteur égale à la distance du centre de gravité de cette paroi au niveau supérieur du liquide. »

Le point d'application de la résultante des pressions exercées sur la surface AB est appelé *centre de pression*. On professe que ce centre coïncide avec le centre de gravité si le plan AB est horizontal, qu'il est au-dessous du centre de gravité quand le plan est incliné, parce que les pressions exercées sur les éléments augmentent en intensité avec la profondeur de ces éléments.

Pour montrer comment on peut déterminer le centre de pression, on présente l'exemple suivant :

« Supposons que la paroi immergée ait la forme d'un trapèze dont les côtés parallèles AB, CD (fig. 75) soient horizontaux. Le centre de pression doit évidemment se trouver sur la droite GH qui joint les milieux de ces deux côtés. Décomposons ce trapèze en une infinité d'éléments tels que EFE'F' par des droites parallèles à AB. Désignons EF par v et par u la perpendiculaire MN abaissée du point M sur AB. On a EFF'E' $= vdu$ et la pression supportée par cet élément est $g\rho zvdu$. En nommant u_1 la distance du centre de pression I à AB et h la hauteur du trapèze, on déterminera u_1 par l'équation

$$u_1 \int_0^h g\rho zvdu = \int_0^h g\rho zvudu$$

ou

$$(1) \qquad u_1 \int_0^h zvdu = \int_0^h zvudu.$$

» Il faut maintenant, poursuit-on, exprimer z et v en fonction de u. Or si l'on désigne par α l'angle que le plan du trapèze fait avec un plan horizontal et par c la distance du côté AB à la surface du liquide, prise pour plan des xy, on a, en projetant MN sur la verticale élevée par le point M,

$$(2) \qquad z = c + u \sin \alpha.$$

» D'ailleurs, menons BK parallèle à AC et prolongeons EF et CD jusqu'en L et en K; les triangles semblables BDK, BFL donnent, en posant AB $= a$, CD $= b$,

$$\frac{a-b}{a-v}=\frac{h}{u},$$

d'où

(3) $$v=a+\frac{b-a}{h}u.$$

» Substituant les valeurs précédentes de z et de v dans léquation (1) et intégrant, on en tire

(4) $$u_1=\frac{2hc\,(a+2b)+h^2\,(a+3\,ab)\sin\alpha}{bc\,(a+b)+2h\,(a+2b)\sin\alpha}.$$

» Si le côté AB est à fleur d'eau, on a $c=o$ et

$$u_1=\frac{h(a+3b)}{2(a+2b)}.$$

Quand le trapèze est horizontal, on a

$$\sin\alpha=o,\ u_1=\frac{h(a+2b)}{3(a+b)},$$

et le centre de pression coïncide avec le centre de gravité. »

Dans ces démonstrations, on invoque cette proposition contestable, qu'on n'a pas régulièrement établie, que les pressions exercées par le fluide sur tous les éléments du plan AB sont normales à ce plan; et l'on suppose, contrairement à la possibilité, une infinité d'éléments dans ce plan. dans ce trapèze. De plus, la théorie du centre de gravité n'étant pas rationnelle. celle-ci qu'on y rapporte, qui s'y trouve liée, ne peut être non plus rigoureuse.

D'après un principe d'Archimède, *quand un corps pesant est plongé dans un liquide, les pressions exercées sur sa surface ont une résultante unique, égale au poids du liquide déplacé*; en d'autres termes *un corps plongé dans un liquide en équilibre perd une partie de son poids égale au poids du liquide qu'il déplace.*

On a procédé de diverses manières pour démontrer ce principe.

« Supposons, a-t-on dit, que nous sortions le corps du liquide dans lequel il est plongé et considérons par la pensée la masse du liquide qui a pris sa place. Cette masse est en équilibre. Nous pouvons donc, sans rien changer à l'état d'équilibre de tout le liquide, ni aux pressions qui existent en ses différents points, supposer cette masse solidifiée. Or, elle est sollicitée de haut en bas par une force égale à son poids; et comme elle ne descend pas, il faut qu'il existe, pour lui faire équilibre, une autre force verticale de bas en haut égale à ce même poids. Cette dernière force ne peut provenir que du jeu des pressions exercées à l'extérieur de la masse solidifiée. Supposons maintenant que le corps soit porté de nouveau dans le liquide et à la même place qu'il occupait d'abord. Ce corps sera soumis aux mêmes efforts extérieurs que la masse solidifiée dont il occupe exactement la place, c'est-à-dire qu'il sera soumis à un effort de bas en haut égal au poids du liquide qu'il déplace.»

Je rejette ce raisonnement. On se place dans une hypothèse chimérique, impossible. Quand le corps, supposé plus lourd que le liquide, s'y trouve plongé, il presse, comprime plus ou moins la partie qui est au-dessous de lui: cette partie n'est pas dans le même état que celle qui peut rester au-dessus ou même latérale-

ment, et elle est plus comprimée par le corps qu'elle ne l'était par le volume égal de liquide qui occupait la place. Autrement, je ne saurais m'expliquer que le corps, malgré son poids supérieur à celui du liquide, y demeurât en équilibre. La pression que le poids du corps produit sur la partie inférieure du fluide, en accroît l'élasticité, et c'est de là que vient *cet effort de bas en haut* dont on admet l'existence. Or, quand le corps plongé est enlevé, le surcroît de compression qu'il causait cesse, la partie comprimée du liquide s'élève, s'étend, occupe un peu plus de place qu'elle n'en occupait auparavant, et, quand on rétablit le corps à sa première place, il comprime de nouveau le fluide comme je viens de le dire. Et puis, en plongeant le corps dans le liquide, on force le liquide ou du moins une grande partie du liquide dont il prend la place, à monter au-dessus de lui, de telle sorte que le corps plongé se trouve subir la pression d'une quantité de liquide plus grande que celle dont le liquide qui occupait sa place avant qu'il fût retiré éprouvait la pression, et la différence peut être considérable, si le corps plongé est d'un grand volume relativement. L'on n'est donc pas autorisé à dire, comme on le fait, que le corps plongé est soumis *aux mêmes efforts extérieurs* que ceux qui étaient exercés sur la partie liquide qu'il a remplacée.

Voici une autre démonstration plus compliquée, plus savante, mais qui n'est pas plus juste que la précédente.

« Soit un corps plongé $\omega\omega'\omega''$ (fig. 76) et trois axes perpendiculaires entre eux OX, OY, OZ, dont deux sont horizontaux. L'élément infiniment petit ω supporte de dehors en dedans une pression normale $p = \omega h \delta$, δ étant

la densité du liquide et h la distance de sa surface au centre de gravité de l'élément ω. Décomposons la pression p en trois forces x, y, z, parallèles aux trois axes OX, OY, OZ, et désignons par $\overline{p, x}$, l'angle de la force p avec la composante x; on aura $x = p \cos \overline{p, x}, = h\delta\omega \cos \overline{p, x}$. Or, $\omega \cos \overline{p, x}$ n'est autre chose que la projection de l'élément ω sur un plan faisant avec cet élément un angle égal à $\overline{p, x}$, c'est-à-dire sur un plan perpendiculaire à ωx. Cette projection n'est donc autre chose que la section droite d'un cylindre engendré par une droite parallèle à OX, en s'appuyant constamment sur le contour de l'élément ω. En appelant r cette section droite, la composante devient $x = h\delta r$. Or, la pression exercée sur l'élément ω'', intercepté par le même cylindre, donnera aussi une composante égale à $h\delta r$ qui détruira celle qui s'exerce sur l'élément ω. On verrait de même que la composante y parallèle à OY sera détruite par une composante opposée et égale provenant de la pression sur l'élément ω''' intercepté par un cylindre parallèle à OY et s'appuyant sur l'élément ω. Quand à la composante z, parallèle à OZ, elle est égale à $h\delta s$, s étant la section droite du cylindre vertical $\omega\omega'$, et dirigée de bas en haut. La composante verticale provenant de la pression $p' = h'\delta\omega'$, que supporte l'élément ω', sera $z' = h'\delta s$ et dirigée de haut en bas. Le filet vertical $\omega\omega'$ du corps est donc soulevé par une force égale à la différence de ces pressions, c'est-à-dire à $z - z' = (h - h')\delta s$, qui représente le poids d'un filet liquide de hauteur $h - h'$, c'est-à-dire ayant le volume du petit cylindre $\omega\omega'$. On raisonnerait de même pour les cylindres verticaux *infiniment minces* dans lesquels on pourrait décomposer le corps qui se

trouve dès lors soulevé par la résultante de toutes les forces verticales appliquées aux cylindres élémentaires, résultante égale au poids du liquide déplacé par le corps. Si le corps n'était pas entièrement plongé, il suffirait de supposer la pression sur l'élément supérieur égale à zéro. »

Cette argumentation pèche d'abord sous le même rapport que la précédente : elle suppose que la densité du liquide est la même, est égale à δ au-dessus et au-dessous du corps plongé, ce qui ne peut être, par la raison que j'en ai donnée. Et puis, quand même le liquide serait partout d'égale densité, il ne s'ensuivrait pas que $(h-h')\delta s$, considéré comme représentant le poids d'un filet liquide de hauteur $h-h'$ fût aussi la juste mesure de la pression s'exerçant de bas en haut sur le filet vertical $\omega\omega'$ du corps plongé. Etant supposé que le filet vertical $\omega\omega'$ du corps est soumis à une pression de haut en bas égal à p' et a une pression plus grande de bas en haut égale à p, il s'ensuit qu'il subit une pression totale et finale de bas en haut égale à $p-p'$: mais je ne vois pas et je conteste que l'on ait

$$p-p'=z-z'=(h-h')\delta s\,;$$

car je ne vois pas que les pressions du liquide sur les points ω,ω' s'exercent précisément enraison des quantités z, z' (1).

Sans rejeter absolument le principe d'Archimède, je pense qu'il ne saurait se démontrer. Il peut y avoir *sen-*

(1) Dans mon livre intitulé : *Discussions sur les principes de la physique*, p. 226, en critiquant cette même démonstration, j'ai dit, par inadvertance et contrairement à la vérité, que $(h-h')\delta s$ ne représenterait pas un filet liquide de hauteur $h-h'$, quand même le liquide serait partout de la même densité. Je ne remarquais pas que δ exprime la densité du liquide,

siblement égalité entre le poids du volume du liquide déplacé et le poids que perd le corps plongé, mais sans doute il n'y a pas, à cet égard, une égalité absolue; il y a du plus ou du moins, qui dépend du degré d'élasticité, de compressibilité du fluide.

On prétend déterminer rigoureusement la position d'équilibre d'un corps solide plongé en partie dans un liquide. Cela revient, dit-on, à couper ce corps par un plan en deux segments, dans un rapport déterminé, de telle sorte que le centre de gravité du corps et celui d'un des deux segments soient sur une même perpendiculaire au plan sécant.

Ainsi, par exemple, voici comment on résout le problème pour un prisme triangulaire droit dont on suppose les arêtes horizontales :

« Une section ABC (fig. 77) perpendiculaire aux arêtes étant faite dans le prisme, le niveau du liquide devra partager le triangle par une droite DE en deux segments CDE, ADEB tels que l'on ait

$$\frac{\text{CDE}}{\text{ABC}} = r,$$

r étant le rapport de la densité du prisme à celle du liquide. Il faudra en outre que les centres de gravité G et H de ces deux triangles soient sur une même perpendiculaire à DE. Soient

$$\text{CA} = a, \ \text{CB} = b, \ \text{CK} = h, \ \text{CD} = x, \ \text{DE} = y;$$

— J'ai dit aussi, en cet endroit, que les valeurs relatives de h et h' étant variables, $h - h'$ est une quantité essentiellement variable. Or c'était là une erreur, car bien que le rapport géométrique de h et h' puisse varier ici, leur différence ou rapport arithmétique ne change pas, du moins dans l'hypothèse où le corps plongé ne change pas de forme, de volume.

x et y sont les deux inconnues qu'il s'agit de déterminer. Or on a

$$\text{surf CAB} = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C, \quad \text{surf CDE} = \tfrac{1}{2}\, xy \sin C,$$

d'où

$$(1) \qquad xy = rab.$$

D'un autre côté, GH est perpendiculaire à DE, ainsi que FK qui lui est parallèle, et comme DF = FE, il s'ensuit qu'on a KD = KE. Réciproquement, si KD = KE, la droite KF et par suite GH sera perpendiculaire à DE. Or, si l'on nomme α et β les angles ACK et BCK, on a

$$\overline{KD}^2 = x^2 + h^2 - 2hx \cos \alpha = y^2 + h^2 - 2hy \cos \beta;$$

donc, puisque KD = KE,

$$(2) \qquad x^2 - 2hx \cos \alpha = y^2 - 2hy \cos \beta.$$

En éliminant y entre les équations (1) et (2), on trouve

$$(3) \quad x^4 - 2h \cos \alpha .\, x^3 + 2rhab \cos \beta .\, x - r^2 a^2 b^2 = 0.$$

Cette solution, fondée sur la théorie du centre de gravité que j'ai critiquée, ne peut être rigoureuse.

Il en est de même des spéculations où l'on veut déterminer les conditions de stabilité d'un corps flottant. L'on y fait d'ailleurs usage du principe des forces vives qui, nous l'avons vu, n'est pas non plus incontestable.

CHAPITRE XV

DE L'HYDRODYNAMIQUE. ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMEMT

On a fondé les équations d'équilibre des fluides sur la propriété qu'on leur attribue, de transmettre également en tous sens les pressions appliquées à leur surface, et sur celle qu'on leur attribue aussi, d'exercer sur chaque élément de surface autour d'un point quelconque de leur masse, en vertu des actions moléculaires, une pression égale en tous sens et normale à l'élément de surface. Je conteste ces propriétés. L'on convient d'ailleurs que la dernière n'a pas toujours lieu quand le fluide est en mouvement : on reconnaît que, dans ce cas, la pression peut n'être pas normale à l'élément sur lequel elle s'exerce, ni être la même dans toutes les directions autour d'un même point; mais on pense que cette même propriété des fluides a encore lieu quand le mouvement est peu rapide, en se fondant sur ce que les expériences s'accordent assez bien avec les résultats théoriques qu'on a déduits de cette hypothèse.

« Soient, dit-on, x, y, z les coordonnées d'un point m, μ la masse de la molécule fluide qui se trouve au point m après le temps t. Désignons par X, Y, Z les compo-

santes rapportées à l'unité de masse, de la force qui agit sur la molécule μ. Les composantes de la force motrice seront $X\mu$, $Y\mu$, $Z\mu$. Il faudra cinq équations pour déterminer les composantes u, v, w de la vitesse du point, sa pression p et sa densité ρ.

« Le principe de d'Alembert fournit d'abord trois équations. Soient $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$ les accroissements de u, v, w, lorsque le temps t augmente de dt. Les composantes de la force perdue sont $(X-u')\mu$, $(Y-v')\mu$, $(Z-w')\mu$, et celle de la force effective $\frac{dp}{dx}\mu$, $\frac{dp}{dy}\mu$, $\frac{dp}{dz}\mu$. Donc, d'après les équations déquilibre des fluides, on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx}=(X-u')\rho, \\ \dfrac{dp}{dy}=(Y-v')\rho, \\ \dfrac{dp}{dz}=(Z-w')\rho. \end{cases}$$

» Pour obtenir u', v', w', on doit différentier u, v, w, en regardant x, y, z comme des fonctions de t, dont les accroissements sont udt, vdt, wdt, en sorte que $dx = udt$, etc. On aura donc

$$(2)\qquad \begin{cases} u'=\dfrac{dp}{dt}+u\dfrac{du}{dx}+v\dfrac{du}{dy}+w\dfrac{du}{dz}, \\ v'=\dfrac{dv}{dt}+u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{dv}{dy}+w\dfrac{dv}{dz}, \\ w'=\dfrac{dw}{dt}+u\dfrac{dw}{dx}+v\dfrac{dw}{dy}+w\dfrac{dw}{dz}, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx}=X-\dfrac{du}{dt}-u\dfrac{du}{dx}-v\dfrac{du}{dy}-w\dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dy}=Y-\dfrac{dv}{dt}-u\dfrac{dv}{dx}-v\dfrac{dv}{dy}-w\dfrac{dv}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dz}=Z-\dfrac{dw}{dt}-u\dfrac{dw}{dx}-v\dfrac{dw}{dy}-w\dfrac{dw}{dz}, \end{cases}$$

» Il reste encore à trouver deux équations d'équilibre ou une seule si ρ est constante. Nous trouverons cette équation en exprimant que le fluide est continu.

» Concevons dans l'espace occupé par le fluide un petit parallélipipède *me* (fig. 73 ci-dessus). A chaque instant une partie du fluide sort de ce volume, et une autre y rentre. La masse du fluide contenue dans ce parallélipipède, $\rho dxdydz$, au temps t, devient $(\rho+\frac{d\rho}{dt}dt)\,dxdydz$ au temps $t+dt$. L'accroisement de masse est donc $\frac{d\rho}{dt}dt.dxdydz$. En vertu du mouvement il passe par la face $dydz$ une tranche fluide $\rho udtdydz$. Il passe par la face opposée une masse $(\rho u+\frac{d\rho u}{dx}\,dtdydz$. L'excès de la quantité qui entre sur celle qui sort est donc $-\frac{d.\rho u}{dx}\,dxdydzdt$, en supposant ρu constant dans toute l'étendue de la face *mabg* et de sa parallèle. Or cette supposition est permise, car si l'on considère deux points *h* et *k* pris sur les faces *md* et *ae*, la différence des valeurs de ρu en ces deux points surpasse la différence des valeurs de ρu aux points *m* et *a* d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même. On obtiendrait des expressions analogues pour les quantités

de fluides acquises par les autres faces. En exprimant que l'accroissement total de la masse est égal à $\frac{d\rho}{dt}dxdydz$ et divisant par $dxdydzdt$, on aura donc

$$(4) \qquad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}=o.$$

» Si la densité du fluide est constante, ce qui arrive pour les liquides homogènes et incompressibles, l'équation précédente devient

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=o.$$

Elle suffit avec les équations (3) pour déterminer toutes les inconnues en fonction de x, y, z, t. »

Pour contester cette analyse, il me suffit de faire observer qu'on y applique le principe de d'Alembert que je crois avoir renversé, et que de plus on y fait usage du chimérique infiniment petit.

Si le fluide n'est pas indéfini, est *terminé*, pour trouver son mouvement, on suppose que les molécules en contact avec une paroi fixe ou mobile y restent indéfiniment et que les molécules qui appartiennent à la surface libre ne cessent jamais d'en faire partie : hypothèses qui sans doute ne sont pas conformes à la vérité.

« Soit $f(t, x, y, z)=o$ l'équation d'une surface sur laquelle un point du fluide doit toujours demeurer, on a

$$f(t+dt, x+ut, y+vdt, z+wdt)=o,$$

équation qui exprime que la molécule sera encore sur cette surface au bout du temps $t+dt$, et qui donne

$$\frac{df}{dt}\ u\ \frac{df}{dx} + v\ \frac{df}{dy} + w\ \frac{df}{dz} = o.$$

Si la paroi est fixe, $\frac{df}{dt}$ disparaît, et l'équation se réduisant à

$$\frac{df}{dx} u + \frac{df}{dy} v + \frac{df}{dz} w = o$$

montre que la vitesse du point est à chaque instant dirigée suivant une tangente à la surface.

Dans la détermination du mouvement d'un fluide homogène qui, renfermé dans un vase, s'écoule par un orifice horizontal pratiqué au fond du vase, on y conçoit le liquide divisé en tranches horizontales *infiniment minces*, et l'on fait usage du principe de d'Alembert.

Dans la suite de l'hydrodynamique on commet aussi des irrationalités de ce genre.

CHAPITRE XVI

DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

Je rends hommage à la sagacité, à la studieuse persévérance, au génie des hommes qui ont concouru à faire la *science astronomique*; mais peut-on bien regarder comme absolument vraies les notions, les propositions qu'elle a consacrées et qui ont reçu le nom de *lois*? Doit-on bien, notamment, regarder comme incontestables, comme rigoureusement prouvées par les observations, comme mathématiquement démontrées, celles qu'on appelle les lois de Képler et la loi de la gravitation ?

Képler déduisit de l'observation et reconnut les trois lois suivantes :

1° Les planètes se meuvent dans des courbes planes, et leurs rayons vecteurs décrivent autour du centre du soleil, des aires proportionnelles au temps;

2° Les orbites, c'est-à-dire les trajectoires des planètes, sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers ;

3° Les carrés du temps des révolutions des planètes autour du soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes.

Ces lois se rapportent au centre de gravité de chaque planète, et nous avons vu que la théorie du centre de gravité ne peut être exacte.

D'après la loi, ou, si l'on veut, les lois de la gravitation, 1° les corps s'attirent en raison directe des masses ; 2° l'attraction varie en raison inverse des carrés des distances.

Les lois de Képler ont conduit à celles de l'attraction universelle, et l'analyse s'est attachée à montrer la liaison existant entre elles.

Suivant la première loi de Képler, la force qui retient chaque planète dans son orbite est constamment dirigée vers le centre du soleil. Pour montrer que c'est là une conséquence de la proportionnalité des aires au temps, on a dit (Poisson, t. 1er; p. 428) :

« Soit, M_1M (fig. 78) le côté de la trajectoire que le mobile décrit pendant un temps τ infiniment petit. Arrivé au point M, si aucune force n'agissait sur ce mobile, il décrirait dans un autre temps τ, une partie Mm du prolongement MT de M_1M, égale à M_1M; mais à cause de la force à laquelle il est soumis, il se transporte, dans ce second instant, en un autre point M'. Soit MK la direction de cette force au point M; pendant le temps τ, on pourra supposer qu'elle reste parallèle à elle-même, et alors, si l'on tire la droite mM', elle sera parallèle à MK. Or, si C est le centre fixe autour duquel le rayon vecteur CM décrit des aires proportionnelles au temps, les triangles M_1CM et MCM', qui sont les aires décrites dans deux instants égaux, seront équivalents; mais les triangles M'CM et MCm le sont aussi, puisqu'ils ont leurs sommets au même point C, et leurs bases M_1M et Mm égales et sur une même droite ; les triangles MCm

et MCM′ sont donc équivalents ; et comme ils ont une même base MC, il faut que la droite mM' qui joint leurs sommets soit parallèle à cette base; par conséquent la droite MK, parallèle à mM', coïncide avec MC. Donc en chaque point M de la trajectoire, la direction MK de la force sera celle du rayon vecteur MC ; ce qu'il s'agissait de démontrer.

» Réciproquement, si la force qui agit sur le mobile, au point quelconque M, est dirigée suivant MC, la droite mM' sera parallèle à ce rayon vecteur, les deux triangles M′CM et MCm seront équivalents, et, par conséquent aussi, les deux triangles M′CM et M_1CM. Les aires décrites par le rayon vecteur autour du point C, en deux instants consécutifs et égaux, étant égales, et cela ayant lieu dans toute l'étendue de la trajectoire, si la force qui agit sur le mobile est constamment dirigée vers ce point, il s'ensuit que les aires décrites en temps égaux seront égales, et, en des temps quelconques, proportionnelles à ces temps.

» Soit M la position de la planète au bout du temps t (fig. 79) ; soient r et θ le rayon vecteur OM et l'angle MOB ; désignons, en outre, par x et y les deux coordonnées rectangulaires OP et PM rapportées à des axes Ox et Oy, dont le premier passe par le périhélie B ; nous aurons

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ x^2 + y^2 = r^2.$$

Soit aussi R la force accélératrice, inconnue en grandeur, qui agit sur la planète. Cette force est dirigée, comme on vient de le voir, suivant le rayon vecteur, et elle agit du point M vers le point O, à cause que la trajectoire tourne sa concavité du côté du soleil ; les cosinus des angles

qu'elle fait avec les prolongements de x et y sont donc $-\frac{x}{r}$ et $-\frac{y}{r}$; par conséquent les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{R}\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mathrm{R}\frac{y}{r}. \qquad (1)$$

» En appelant toujours v la vitesse au point M, nous aurons

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2},$$

et en différentiant

$$\frac{1}{2}dv^2 = \frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy;$$

par conséquent, si l'on ajoute les équations (1) après les avoir multipliées par dx et dy, et si l'on observe que $xdx + ydy = rdr$, il en résultera

$$\tfrac{1}{2}d.\,v^2 = -\mathrm{R}dr.$$

Mais, dans le mouvement elliptique, on a

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

en faisant

$$\frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2} = \mu;$$

on aura donc

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{r^2};$$

ce qui montre que la force qui agit sur chaque planète suit la raison inverse du carré de la distance au centre du soleil.

» La grandeur de cette force est μ à l'unité de distance : soit μ' ce qu'elle devient pour une autre planète, dont le demi-grand axe et le temps de la révolution seront représentés par a' et T'; on aura de même

$$\mu' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}.$$

Or, d'après la troisième loi de Képler, on a

$$T^2 : T'^2 : : a^3 : a'^3 ;$$

d'où il résulte

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}, \mu = \mu' ;$$

par conséquent, à l'unité de distance, et généralement à la même distance du soleil, la force accélératrice R est la même pour deux planètes différentes.

» La force motrice de deux planètes est donc indépendante de sa nature particulière, et proportionnelle à sa masse, comme les poids à la surface de la terre. Elle varie d'une planète à une autre, suivant la même loi que d'une position à une autre de la même planète ; et si deux planètes étaient situées à la même distance du soleil, et abandonnées à elles-mêmes, sans vitesse initiale, elles tomberaient d'un même mouvement vers cet astre, et l'atteindraient dans le même intervalle de temps.

» Ainsi les trois lois de Képler nous font connaître complètement la force qui retient les planètes dans leurs orbites : la loi des aires proportionnelles au temps nous fait voir que cette force est constamment dirigée vers le centre du soleil; celle du mouvement elliptique, ou l'expression de la vitesse qui se déduit de cette loi et de la précédente, nous montre que son intensité varie, pour une même planète, en raison inverse du carré des distances au soleil; enfin nous concluons de la loi des carrés des temps des révolutions proportionnels aux cubes des grands axes, qu'à égalité de distance au centre de cet astre, l'intensité de la force motrice est proportionnelle aux masses de chaque planète, et indépendante de sa nature particulière. »

On prétend d'ailleurs démontrer qu'une sphère homogène ou composée de couches excentriques homogènes, étant supposée douée d'une force attractive en raison inverse du carré des distances, doit attirer comme si toute sa masse était réunie à son centre : l'attraction du soleil serait donc en raison directe de sa masse, dans l'hypothèse de l'homogénéité de ses couches.

L'analyse mathématique est revenue aux lois de Képler en partant de la gravitation définie par Newton, et en supposant une impulsion primitive donnée aux planètes.

On montre comme il suit le principe des aires :

« Soit M (fig. 80) un point mobile sollicité à chaque instant par une force dont la direction passe constamment par un même point O. Les composantes de la force accélératrice, par rapport à trois axes rectangulaires menés par le point O, seront proportionnelles aux coordonnées du point M. On aura donc

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}$$

ou bien

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = o, \\ \dfrac{zd^2x - xd^2z}{dt^2} = o, \\ \dfrac{yd^2z - zd^2y}{dt^2} = o, \end{cases}$$

équations dont chacune est une conséquence des deux autres. En les intégrant et désignant par c, c', c'' trois constantes arbitraires, on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} xdy - ydx = cdt, \\ zdx - xdz = c'dt, \\ ydz - zdy = c''dt. \end{cases}$$

» Les constantes c, c', c'' se détermineront quand on connaîtra la position initiale et la vitesse initiale du mobile, en grandeur et en direction, c'est-à-dire les valeurs initiales de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

» Si l'on ajoute les équations (2) après les avoir respectivement multipliées par z, y, x, on a

$$(3) \qquad o = cz + c'y + c''x,$$

équation d'un plan passant par l'origine des coordonnées. Ainsi la trajectoire est une courbe plane. En effet, on voit bien *à priori* que le point mobile ne doit pas sortir

du plan mené par le rayon vecteur initial et par la direction de la vitesse initiale.

» Interprétons maintenant les équations (2). Soit OP $= r$ la projection du rayon vecteur OM sur le plan des xy, et soit $\mathrm{PO}x = \theta$, on aura

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{x},$$

d'où, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{r^2 \cos^2 \theta}.$$

d'où l'on tire

$$r^2\, d\theta = xdy - ydx.$$

Mais si l'on appelle λ l'aire BOP parcourue par la projection du rayon vecteur, pendant le temps t, on a

$$d\lambda = \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta;$$

donc

$$d\lambda = \tfrac{1}{2} (xdy - ydx) \text{ ou } d\lambda = \tfrac{1}{2} c dt,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \tfrac{1}{2} ct.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter; car λ étant la projection de l'aire pendant le temps t, on doit avoir λ o pour $t = o$.

» On conclut de là que *le secteur engendré par le mouvement de la projection du rayon vecteur sur un plan quelconque est proportionnel au temps.* La constante c est le double du secteur parcouru, pendant l'unité de temps,

par la projection du rayon vecteur sur le plan des xy. On aura des résultats analogues pour les deux autres axes. On aura donc,

$$\lambda = \tfrac{1}{2} ct, \lambda' = \tfrac{1}{2} c't, \lambda'' = \tfrac{1}{2} c''t,$$

si l'on projette le rayon vecteur sur le plan même de la courbe. On en conclut que l'aire engendrée par le rayon vecteur lui-même est proportionnelle au temps. »

Au moyen de l'analyse, on a déterminé le mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

« Supposons, a-t-on dit, toute la masse d'une planète réunie à son centre de gravité, et cherchons le mouvement que prendra ce point, sollicité à chaque instant par une force dont la direction passe constamment par un point fixe O, et dont l'intensité varie en raison inverse du carré de la distance $OM = r$ (fig. 81).

» En premier lieu, la trajectoire est plane et située dans le plan qui passe par le point fixe et par la direction de la vitesse initiale. Prenons le point O pour pôle et Ox pour axe polaire, et soient r et θ les coordonnées du point M, au bout du temps t : on aura, par le principe des aires,

$$(1) \qquad r^2 d\theta = c dt.$$

Or,

$$\frac{r^2 d\theta}{dt} = r \times \frac{r d\theta}{dt} = r \times v \sin \delta ;$$

en appelant v la vitesse du mobile et δ l'angle que forme le rayon vecteur avec la tangente à la trajectoire. Donc

$$c = v \times r \sin \delta. \tag{2}$$

Ainsi on peut dire que la constante c, qui représentait déjà le double du secteur engendré par le rayon vecteur, pendant l'unité de temps, la trajectoire étant supposée connue, sera pour nous, dans la question actuelle, le produit de la vitesse du mobile par la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la tangente, à un instant quelconque, par exemple à l'origine du temps.

» Soit maintenant R la force accélératrice à l'instant que l'on considère. On a

$$d.v^2 = -2\mathrm{R}dr, \tag{3}$$

et comme ici $\mathrm{R} = \frac{\mu}{r^2}$, en appelant μ la force accélératrice à l'unité de distance, il vient

$$d.v^2 = -\frac{2\mu dr}{r^2}$$

et, par suite, en intégrant,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - b. \tag{4}$$

La valeur de la constante arbitraire b se déterminerait en cherchant la valeur de $\frac{2\mu}{r} - v^2$, à une époque quelconque du mouvement, par exemple à l'origine du temps. D'ailleurs puisque

$$v^2 = c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right],$$

l'équation différentielle de la trajectoire est

$$(5) \qquad c^2\left[\frac{1}{r\theta}+\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right]=\frac{2\mu}{r}-b$$

» Pour intégrer plus facilement, posons $\frac{1}{r}=z$, d'où résulte

$$d\theta=\frac{\mp cdz}{\sqrt{-b+2\mu z-c^2z^2}}.$$

On voit que $\frac{dz}{d\theta}$ devant être $< o$ ou $> o$, suivant que r croît ou décroît lorsque θ augmente, il faudra prendre au numérateur le signe — ou le signe +, suivant que le premier ou le second cas aura lieu. Si donc nous supposons que r croisse en même temps que θ, on aura

$$d\theta=\frac{-cdz}{\sqrt{-b+2\mu z-c^2z^2}}=\frac{-c^2dz}{\sqrt{\mu^2-bc^2-(c^2z-\mu)^2}}$$

ou bien

$$d\theta=\frac{-c^2dz}{\sqrt{\mu^2-bc^2}\sqrt{1-\frac{(c^2z-\mu)^2}{\mu^2-bc^2}}}.$$

» On a toujours $\mu^2-bc^2>o$, sans quoi $\frac{d\theta}{dz}$ serait imaginaire pour toutes les valeurs possibles de θ. Donc si l'on pose

$$(6) \qquad \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}} = q,$$

il vient

$$\frac{c^2 dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}} = dq, \, d\theta = \frac{-dq}{\sqrt{1 - q^2}}$$

d'où, en intégrant et appelant ω un angle constant, on a enfin

$$\theta = \omega + \text{arc cos } q$$

ou

$$(7) \qquad \cos(\theta - \omega) = \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}.$$

» En remplaçant z par $\frac{1}{r}$, dans l'équation (7), il vient, pour l'équation de la trajectoire,

$$(8) \qquad r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \frac{bc^2}{\mu^2}} \cos(\theta - \omega)},$$

On voit que cette courbe est toujours une section conique, car l'équation générale d'une section conique, rapportée à un foyer et à un axe polaire, faisant un angle ω avec l'axe qui passe par le foyer, est

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}.$$

La courbe est une ellipse, si $e < 1$; une parabole, si $e = 1$, et une hyberbole, si $e > 1$. Par conséquent, en se rappelant que b est égal à la valeur initiale de $\frac{2\mu}{r} - v^2$, on voit que, si à une époque quelconque du mouvement on a

$$v^2 < \frac{2\mu}{r}, \text{ la courbe est une ellipse;}$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}, \text{ elle est une parabole;}$$

$$v^2 > \frac{2\mu}{r}, \text{ elle est une hyberbole.}$$

» Ainsi l'espèce de la courbe dépend uniquement de la grandeur de la vitesse à l'origine du temps, mais nullement de sa direction, en sorte que différents mobiles, lancés successivement du même point de l'espace, avec des vitesses égales, mais de directions différentes, parcourraient tous des courbes de même espèce.

» En appelant $2a$ le grand axe et e l'excentricité, l'équation de l'ellipse est

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)}.$$

Identifiant avec l'équation (8), on a

$$(1) \qquad e = \sqrt{1 - \frac{bc^2}{\mu^2}}, \; a = \frac{\mu}{b},$$

formules qui déterminent les éléments de l'ellipse, en fonction des données du problème.

» Il reste encore à déterminer v, r et θ en fonction du temps t, afin de connaître la vitesse et la position du mobile à une époque donnée. On a d'abord

$$(2) \qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} - b,$$

d'où, à cause de

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2\, d\theta^2}{dt^2},$$

on a

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{\mu^2}{r} - b.$$

En éliminant $d\theta$ entre cette équation et l'équation $r^2 d\theta = cdt$, il vient

$$dt = \frac{\mp rdr}{\sqrt{-br^2 + 2\mu r - c}},$$

ou

$$(3) \qquad dt = \frac{rdr}{\sqrt{-br^2 + 2\mu r - c^2}},$$

en supposant d'abord que r croisse avec t. En remplaçant b par $\frac{\mu}{a}$ et c^2 par $\mu a\ (-c^2)$, cette différentielle peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad dt = \frac{rdr}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}.$$

» Si AMB (fig. 82) est l'ellipse parcourue, le mobile est le plus près du point O, pôle et foyer de l'ellipse, à l'extrémité A du grand axe nommée *périhélie* de la planète, et il est le plus loin de O, à l'autre extrémité B, que l'on nomme *aphélie* de la planète. Par conséquent, le rayon vecteur r varie de OA $= a\ (1 - e)$ à OB $= a\ (1 + e)$. Il est donc permis, pour la commodité de l'intégration, d'introduire une variable auxiliaire u, telle que

$$r = a\ (1 - e \cos u).$$

on en tire

$$dr = ac \sin u du,$$

et l'équation (3) devient

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}\, dt = (1 - e \cos u)\, du$$

ou

$$ndt = (1 - e \cos u)\, du,$$

en posant, pour abréger

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}.$$

En intégrant, on a l'équation

$$nt = u - e \sin u,$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, si l'on compte le temps à partir du moment où la planète est à son péri-

hélie ; car alors $r = a\ (1 - e)$, et par conséquent cos $u = 1$, d'où $u = o$ en même temps que $t = o$.

» Pour construire l'angle auxiliaire u, sur BA (fig. 82), comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle. Soient M la position actuelle du mobile et c le centre de l'ellipse. Prolongeons l'ordonnée MP jusqu'au point K où elle rencontre la circonférence. Je dis que l'angle KCA $= u$. En effet, on a

$$r = a - e \times \mathrm{CP} = a - e \times a \cos \mathrm{KCA}$$

$$= a(1 - e \cos \mathrm{KCA}) ;$$

mais

$$r = a\,(1 - e \cos u),$$

d'où

$$\cos \mathrm{KCA} = \cos u \text{ et } \mathrm{KCA} = u.$$

L'angle u est appelé l'*anomalie excentrique* de la planète, tandis que l'angle MOA $= \theta - \omega$ se nomme l'*anomalie vraie*. On pourrait maintenant éliminer u entre les équations (1) et (2) ; mais il vaut mieux conserver ces deux équations avec la variable auxiliaire u. En donnant à cette variable toutes les valeurs possibles, on en déduira ensuite les valeurs correspondantes de r et de t.

» La durée T de la révolution entière de la planète se déduit de la formule $nt = u - e \sin u$, en y faisant $u = 2\pi$, ce qui donne

$$n\mathrm{T} = 2\pi$$

ou

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}},$$

en remplaçant n par $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$. On en déduit, pour la valeur de la force accélératrice, à l'unité de distance, commune à toutes les planètes,

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

En appelant M et m les masses respectives du soleil et d'une planète, r la distance de leur centre de gravité, et f le coefficient de l'attraction universelle, on juge que $\frac{fMm}{r^2}$ est la mesure de l'attraction qu'un de ces deux corps exerce sur l'autre ; que, par suite, abstraction faite de toute autre cause $\frac{fM}{r^2}$, $\frac{fm}{r^2}$ sont respectivement les forces accélératrices de la planète et du soleil ; et, comme elles sont en raison inverse des masses de ces corps, on en conclut que, s'ils n'avaient aucune vitesse initiale, ils viendraient se réunir sur la droite qui joint leurs centres au centre de gravité du système de ces deux corps. On le montre ainsi :

» S et s étant les espaces rectilignes parcourus par le soleil et par la planète, jusqu'à leur point de rencontre, on aura

$$M\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2}, \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2}$$

d'où résulte

$$M\frac{d^2S}{dt^2} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

par suite

$$M \frac{dS}{dt} = m \frac{ds}{dt},$$

et enfin

$$MS = ms.$$

» Il n'y a pas de constante à ajouter, car on suppose que le soleil et la planète partent en même temps, sans vitesse initiale. De l'équation $MS = ms$, on déduit

$$S : s = m : M,$$

ce qui démontre la proposition énoncée. »

Pour obtenir le mouvement relatif d'une planète autour du soleil, c'est-à-dire le mouvement apparent de cette planète pour un observateur placé à la surface du soleil, on suppose appliquée au centre de gravité du soleil une force égale et contraire à celle qui le fait mouvoir dans l'espace, afin de pouvoir le considérer comme fixe; mais en même temps, afin de ne pas altérer le mouvement de la planète par rapport au soleil, on suppose aussi qu'une force égale et parallèle à cette dernière est appliquée au centre de gravité de la planète. Ainsi ce dernier point serait constamment sollicité par une force dirigée vers le centre du soleil et égale à

$$\frac{fM}{r^2} + \frac{fm}{r^2} \text{ ou à } \frac{f(M+m)}{r^2} = \frac{\mu}{r^2},$$

en appelant μ le coefficient $f(M+m)$ constant pour toutes les positions de la planète.

D'un autre côté, on a obtenu, comme on l'a vu, la formule

$$\mu = \frac{4\,\pi^2 a^3}{T^2}$$

a étant le demi-grand axe de l'ellipse, et T la durée d'une révolution entière. Par conséquent

$$\frac{4\,\pi^2 a^3}{T^2} = f\,(M + m),$$

et, comme la masse m varie d'une planète à l'autre, on voit que $\frac{a^3}{T^2}$ n'est réellement pas constant pour toutes les planètes. Mais considérant que, d'après les observations, la troisième loi de Képler est extrêmement approchée, on conclut que m est très-petit par rapport à M, ou que les masses des planètes sont très-petites relativement à la masse du soleil. En effet, dit-on, la masse de Jupiter. qui est la plus considérable de toutes les planètes, n'est pas $\frac{1}{1000}$ de celle du soleil.

Toutes ces analyses laissent à désirer au point de vue de la rigueur mathématique, en ce qu'on y met en rapport réel de quantités des courbes et des droites, et parfois des courbes qui diffèrent essentiellement entre elles. Il en est de même généralement des analyses concernant les autres parties de la mécanique céleste, notamment de celles qui se trouvent dans le grand ouvrage de Laplace. D'ailleurs on y néglige souvent des quantités qu'on ne peut faire figurer dans les calculs : bien que ces quantités soient très-petites, leur négligence exclut la possibilité d'une rigueur absolue dans les résultats.

Si je porte mes investigations sur les observations au moyen desquelles on a édifié l'astronomie, je n'y trouve pas non plus des raisons suffisantes pour attribuer le caractère de certitude absolue aux principes de cette science.

Je vais résumer ici dans leurs points principaux ces observations et les explications ou considérations qu'elles ont suggérées. Je ne crois pas pouvoir mieux faire que de puiser ce résumé dans l'astronomie populaire du savant Arago.

Mouvement apparent du soleil. — Si la lunette du cercle mural est fixée dans le plan de l'équateur, le soleil est austral lorsqu'il passe au méridien au-dessous de la direction de la lunette, et boréal quand il passe au-dessus. On a reconnu ainsi que le soleil est pendant six mois au midi de l'équateur, et pendant six mois au nord de ce plan.

En visant, chaque jour de l'année, au centre du soleil, au moment où cet astre arrive au méridien, on a sa déclinaison, c'est-à-dire la position du cercle parallèle à l'équateur qu'il occupe, en comparant le degré où la lunette s'est arrêtée à celui qui correspond à l'équateur. On a trouvé ainsi que c'est dans une zone comprise entre 23° 27′ 1/2 de déclinaison australe et 23° 27′ 1/2 de déclinaison boréale qu'est contenue tout entière la courbe décrite par le soleil en vertu de son mouvement apparent. Les 365 observations au cercle mural faites dans les 365 jours de l'année, comparées à la position invariable de l'équateur ont fait connaître les 365 parallèles, sur lesquels le soleil s'est successivement transporté. A ces 365 résultats on a ajouté les 365 positions des cercles horaires du soleil qu'on a obtenues en comparant chaque

jour le moment du passage de l'étoile Sirius par le méridien, au moment du passage du centre du soleil par le même plan ; et les intersections de ces cercles horaires avec les parallèles correspondants, aux mêmes jours, ont donné les 365 places que le soleil occupe dans l'année. On a donc pu dessiner les positions du soleil sur une sphère offrant une représentation du ciel étoilé.

Or, ces positions ont paru se maintenir sur une courbe continue formant un grand cercle de la sphère, dont une moitié était située au nord de l'équateur et l'autre au midi. Le plan de cette courbe s'appelle *le plan de l'écliptique*, parce que la position du soleil et de la lune, relativement à ce plan, détermine les époques des éclipses de soleil et de lune.

Mouvements apparents des planètes. — En observant chaque jour les planètes avec la lunette méridienne et le cercle mural, elles ont paru stationnaires à certaines époques, puis se dirigeant, par rapport aux étoiles, tantôt de l'occident à l'orient, et tantôt de l'orient à l'occident, avec des vitesses fort inégales. Mais on a remarqué en rapprochant leurs mouvements apparents de ceux du soleil, que les plus grandes vitesses, soit du mouvement direct (1), soit du mouvement rétrograde, avaient toujours lieu quand les centres de la terre, du soleil et de la planète observée semblaient être sur une même ligne droite.

Puis on a reconnu qûe les planètes inférieures, Mercure et Vénus, ne s'éloignaient jamais du soleil qu'à des distances angulaires assez petites, tandis que les planètes

(1) Le mouvement direct a lieu de l'occident à l'orient; le mouvement rétrograde a lieu en sens contraire.

supérieures s'en écartaient à des distances angulaires beaucoup plus grandes.

Lors de ses plus grandes élongations, une planète inférieure offre l'apparence d'un demi-disque lumineux dont le bord curviligne est tourné vers le soleil. Entre ses élongations extrêmes, la planète se présente comme un croissant dont la convexité regarde le soleil.

Les planètes supérieures ne présentent pas ces phases, ce qu'on explique par leur grand éloignement.

Mouvements réels des planètes. — Pour déterminer ces mouvements, on a transformé fictivement les *positions géocentriques* en *positions héliocentriques*. On a supposé d'abord que les planètes se meuvent dans le plan de l'écliptique, ce qui n'est pas bien loin de la vérité, du moins pour les planètes principales. Dans cette hypothèse, quand une planète est en opposition, la ligne droite menée du soleil à la terre projette la planète sur l'étoile à laquelle aboutit la ligne menée du soleil à la même planète : de cette manière on a obtenu, par une observation terrestre, la place de la planète sur le ciel étoilé, comme si on l'eût observée du soleil.

Quelques mois après, le soleil, la terre et la planète s'étant trouvés de nouveau en ligne droite, la planète répondait à une autre étoile, ce qui procurait une seconde position héliocentrique. Bientôt une troisième opposition vint donner la position de la planète pour un observateur qui serait placé dans le soleil.

Au moyen d'un très-grand nombre d'observations de cette sorte et d'une interpolation, on a pu déterminer le temps que la planète vue du soleil emploie à revenir à la même étoile, c'est-à-dire le temps de sa révolution complète.

Les mêmes planètes ayant été observées à leurs conjonctions, on a trouvé de même les moments où, vues du soleil, elles correspondaient à d'autres étoiles, et obtenu ainsi de nouvelles déterminations des temps qu'elles emploient à l'accomplissement de leurs révolutions.

Or, d'après les faibles valeurs trouvées par les parallaxes des étoiles, on a supposé que les constellations auraient la même grandeur pour un observateur placé sur la terre et pour celui qui occuperait le centre du soleil; que, par conséquent, la distance angulaire de deux étoiles quelconques serait à très-peu près la même pour les deux observateurs. Les angles sous-tendus par ces étoiles ayant donc sensiblement la même valeur, dans les deux situations respectives des observateurs supposés, on a pu, en discutant toutes les positions héliocentriques données par les oppositions et les conjections, arriver à la détermination du mouvement angulaire de la planète vue du soleil. Il est résulté de cette discussion et de cette détermination, que, pour un observateur placé dans le soleil, les stations et les rétrogradations des planètes supérieures n'existent pas; que toutes ces planètes se meuvent constamment dans le même sens, mais que leur mouvement angulaire n'est pas uniforme. Des résultats analogues ont été fournis par les observations de Mercure et de Vénus, prises dans leurs conjonctions supérieures et inférieures.

Soient maintenant (fig. 83) S le soleil, T la terre et M une planète, prise vers les quadratures, c'est-à-dire lorsque l'angle MST est à peu près droit. La ligne ST aboutit à une certaine étoile E, la ligne SM aboutit à une autre étoile E′, l'angle en S (E′SE) compris entre ces

deux étoiles, est le même que s'il était mesuré en T (E'TE), par conséquent il est connu. L'angle MTS, dont le sommet est situé sur la terre, peut toujours être déterminé directement; donc le troisième angle TMS du triangle formé par les droites ST, TM et SM, sera connu, puisqu'il sera le complément à 180° de la somme des deux précédents. En construisant graphiquement un triangle ayant les mêmes angles que celui qui est formé par les lignes joignant la terre, le soleil et la planète, les côtés de ce triangle seront proportionnels aux côtés du triangle STM. On obtiendra donc le rapport de TS à SM, conséquemment des distances de la terre au soleil et du soleil à la planète.

Il a fallu, il est vrai, tenir compte de la variation du côté TS, mais des calculs antérieurs avaient fait connaître les variations des distances du soleil à la terre, c'est-à-dire de TS, pour tous les jours d'une année quelconque. En marquant sur un tableau le point S représentant le soleil, et les rayons vecteurs SM, SM′, SM″...., sur lesquels telle planète, vue du soleil, devrait paraître située aux différents jours de l'année, et à l'aide de la résolution des triangles STM, STM′, STM″...., on a déterminé les distances du point S auxquelles la planète doit se trouver successivement, et en faisant passer une courbe par les positions M, M′, M″...., on a obtenu l'orbite décrite par la planète autour du soleil; orbite qui n'est pas circulaire, mais une ellipse dont le soleil occupe l'un des foyers.

On a reconnu que la terre elle-même décrit une ellipse autour du soleil; que le mouvement de cet astre autour de notre globe n'est qu'apparent. On sait les considérations qui militent si victorieusement en faveur de cette

opinion maintenant consacrée dans la science. On sait notamment les expériences si concluantes de M. Foucault.

A l'aide des nombres proportionnels qu'on a obtenus pour l'expression des distances moyennes des planètes au soleil, des durées de leurs révolutions sidérales en jours moyens, et de leurs moyens mouvements diurnes, on a trouvé la liaison qui existe entre les temps des révolutions des planètes et leurs distances au soleil. C'est la troisième loi de Képler.

Loi de l'attraction. — Appliquée à la lune, cette loi s'est vérifiée ainsi :

Soit C (fig. 84) le point occupé par la terre, autour duquel la lune circulerait de droite à gauche ; A la place actuelle de la lune. Au moment de quitter le point A, la lune se meut dans la direction du petit élément de son orbite curviligne qui passe par le point A, c'est-à-dire dans la direction de la ligne droite tangente AT. On observe que la lune, au lieu de suivre cette ligne pour aller rencontrer la direction du rayon CT, va en M, et l'on attribue à une force d'attraction sa déviation de AT; on dit que cette force fait tomber la lune de la quantité TM. A l'aide d'une opération directe, on détermine l'angle formé par le rayon CA mené de la terre à la lune à une certaine époque, avec le rayon CM, dirigé vers le même astre, après une seconde de temps. Le rayon CA, distance de la l'une à la terre, étant connu, on calcule, pour l'angle ACM, mesure du déplacement angulaire de la lune dans une seconde, de combien le point T, extrémité de la tangente, est éloigné du point M, c'est-à-dire de quelle fraction de mètre la lune est tombée vers la terre en une seconde. Ce calcul donna $0^m,001360$.

Or l'espace que parcourt, à Paris, pendant une seconde, un corps abandonné à lui-même à la surface de la terre, c'est-à-dire quand il est à 1591 lieues du centre, est de $4^m,9$. Pour avoir la quantité dont il tomberait si on l'éloignait de ce même centre jusqu'à la région de la lune, on a réduit le nombre précédent dans le rapport des carrés des distances, et l'on a trouvé que la valeur numérique MT est conforme à celle déduite de la vitesse de la lune, et des dimensions de son orbite. On a trouvé, en effet, $0^m,001352$ pour la chute de la lune vers la terre en une seconde. C'est de cette manière que Newton est arrivé à la découverte du principe de la gravitation universelle.

Il avait démontré déjà qu'une force attractive émanée d'un point et agissant réciproquement au carré des distances fait décrire aû corps qu'elle sollicite, une ellipse, ou en général une section conique dont le point d'où émane la force occupe un des foyers. Il voulut vérifier ce principe sur le mouvement de la lune. L'ignorance où l'on était alors de la grandeur de la terre introduisit une erreur dans son calcul, mais ultérieurement une mesure plus exacte lui permit d'obtenir une solution satisfaisante.

Satellites de Jupiter.—On a pu faire des observations et des calculs de ce genre au sujet des satellites de Jupiter.

On a trouvé par une discussion très-minutieuse des éclipses de ces satellites, que le premier et le second décrivent des courbes à peu près circulaires. Par le même moyen on a reconnu que l'orbite du troisième est sensiblement elliptique, mais que son excentricité est variable. L'ellipticité de l'orbite du quatrième est plus considérable. Les extrémités des grands axes de ces ellipses les

plus voisines de la planète ne sont pas toujours dirigées vers les mêmes étoiles. Ces extrémités, qu'on nomme des *périjones*, paraissent avoir un mouvement direct ou dirigé de l'occident à l'orient

Le plan de l'orbe du premier satellite semble coïncider avec celui de Jupiter. Il n'en est pas de même des orbes du second, du troisième et du quatrième satellite : ils font avec le plan de l'orbite de Jupiter des angles appréciables.

Les inclinaisons des plans dans lesquels ces satellites se meuvent, rendent compte de phénomènes qui, sans cela, seraient inexplicables : de la non disparition, par exemple, du quatrième satellite dans un grand nombre de ses oppositions avec le soleil.

De plus, les intersections des plans des orbites des satellites avec le plan de l'orbite de Jupiter, ou les lignes qu'on a appelées *lignes des nœuds,* ne sont pas toujours dirigées vers les mêmes étoiles.

Si l'on prend pour unité le rayon de l'équateur de Jupiter, les distances moyennes des satellites au centre de la planète et les durées de leurs revolutions sidérales seront :

	Distance au centre de Jupiter	Durées des révolutions sidérales				
Premier satellite.	6 05	1 j. 77	ou	1 j.	18 h.	28 m.
Deuxième. . . .	9 62	3 55		3	13	14
Troisième. . . .	15 35	7 15		7	3	43
Quatrième.. . .	26 00	16 69		16	16	32

Il résulte de ces nombres que les habitants de Jupiter voient circuler autour du centre de leur planète et à une distance de 108,000 lieues, une lune ayant un dia–

mètre apparent plus grand que celui de la lune terrestre, qui s'éclipse régulièrement après des intervalles égaux à 1 jour 3/4 environ.

En examinant attentivement ces mêmes nombres, on a trouvé que les carrés des temps des révolutions de deux quelconques de ces satellites sont entre eux comme les cubes de leurs distances moyennes à Jupiter, conformément à la troisième loi de Képler.

Des observations très-délicates ont paru conduire à cette conséquence, que chaque satellite tourne sur lui-même dans un temps égal à celui qu'il emploie à faire sa révolution autour de la planète ; en sorte que ces lunes, comme la lune terrestre relativement à la terre, montreraient toujours la même face au centre de Jupiter.

Masse du soleil. — Pour déterminer cette masse comparée à celle de la terre, on a raisonné ainsi :.

« Un astre qui, à la même distance, produirait, vers son propre centre, dans la première seconde, une chute double, triple..., centuple, aurait évidemment une masse double, triple..., centuple, de celle de la terre. La question se trouve donc ramenée à celle-ci : de combien le soleil, dans l'intervalle d'une seconde, fait-il tomber vers son centre un corps qui en est éloigné autant que notre globe ? Or, cette dernière question trouve sa solution directe, immédiate, dans les circonstances du mouvement annuel de la terre. En vertu de ce mouvement, notre globe décrit autour du soleil, en 365 jours 1/4, une courbe presque circulaire dont le rayon est supérieur à 38 millions de lieues. Divisons les 360 degrés que cette circonférence de cercle renferme, par le nombre de secondes de temps contenues dans 365 jours 1/4. Le quotient sera la très-petite fraction de degré que la

terre parcourt sur son orbite en une seconde de temps. Maintenant supposons le soleil en C (fig. 84), la terre en A ; faisons l'angle ACM égal au déplacement angulaire qu'éprouve la terre en une seconde, le rayon de l'orbite CA de 38 millions, et nous pourrons calculer, en fractions de lieues ou en mètres, la quantité TM, dont le soleil, par sa force attractive, fait tomber la terre en une seconde. Notre globe fait tomber un corps de 4^m 9 en une seconde, lorsque ce corps est distant de son centre de 1600 lieues en nombre rond, et il est aisé de calculer, d'après la loi des carrés des distances, de combien il ferait tomber, dans le même intervalle de temps, un corps qui serait à 38 millions de distance. Cela fait, comme à égales distances, les chutes doivent être proportionnelles aux masses, en cherchant, par une simple division, combien de fois la chute vers la terre est contenue dans la chute vers le soleil, on saura combien il faudrait de globes terrestres pour faire une masse égale à celle du soleil. Par ce procédé, du moins quant au fond, sinon dans la forme, on a trouvé le nombre 354,936 ; c'est-à-dire que la masse de la terre étant 1, celle du soleil serait représentée par 354,936.

Voici comment l'analyse procède généralement, pour résoudre le problème :

« Soit m la masse de la terre. Si elle était parfaitement sphérique, en appelant r son rayon, $\frac{fm}{r^2}$ serait l'attraction totale qu'elle exercerait sur l'unité de masse d'un corps placé à sa surface. Or, comme elle a la forme d'un sphéroïde différant très-peu d'une sphère, quoique cette attraction ne soit pas la même en tous les points de la surface, il existe un certain parallèle, sur

lequel l'attraction terrestre a précisément pour mesure $\frac{fm}{r^2}$, et il résulte du calcul de l'attraction des sphéroïdes que pour ce parallèle, $\sin^2 \lambda = \frac{1}{3}$, en appelant λ la latitude. L'observation démontre d'ailleurs que la pesanteur sur ce parallèle a pour mesure $g = 9^m,79386$. De plus la composante verticale de la force centrifuge a pour mesure sur le même parallèle une fraction $\frac{\cos^2 \lambda}{289} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{289}$ de la gravité. Il faut ajouter cette composante à g, ce qui donne pour l'attraction du sphéroïde terrestre sur l'unité de masse d'un corps placé sur ce parallèle, $G = 9^m,81645$. Or, nous l'avons vu plus haut, on a

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m),$$

on a aussi $G = \frac{fm}{r^2}$.

De ces formules on tire

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{Gr^2T^2} - 1,$$

en appelant M la masse du soleil, a le demi grand axe de l'orbite apparent de la terre autour du soleil et T le nombre de secondes contenu dans une année. En substituant dans cette dernière formule

$$G = 9^m 81645,$$
$$r = 6364551^m,$$
$$a = 23984r,$$

et

$$T = 86400'' \times 365,2563...,$$

on trouve

$$\frac{M}{m} = 354592$$

pour le rapport de la masse du soleil à celle de la terre.

Perturbations du mouvement des planètes. — Newton pensa que les diverses planètes n'étaient point attirées seulement par le soleil, mais qu'elles s'attiraient réciproquement. Or c'était admettre des causes de troubles, de perturbations nombreuses, considérables, continuelles dans la marche des planètes, et les lois, les courbes képlériennes ne pouvaient plus suffire à la représentation exacte des phénomènes.

Newton put prévoir plusieurs des perturbations planétaires; il put même parfois les calculer; mais il était réservé à d'autres savants de résoudre ces grands problèmes. Clairault, Euber, d'Alembert, Lagrange et Laplace se sont partagé cet honneur. Clairault, notamment, fit faire un grand pas à cette partie importante de l'astronomie, par la solution du problème des trois corps, qui avait pour objet de déterminer la marche d'un astre soumis à l'action attractive de deux autres astres.

On distingue deux sortes de perturbations du mouvement elliptique des planètes : les unes affectent les éléments des orbites et changent avec une extrême lenteur; on les a nommées inégalités séculaires. Les autres dépendent de la configuration des planètes, soit entre elles, soit à l'égard de leurs nœuds et de leurs périhélies, et se rétablissent toutes les fois que ces configurations

redeviennent les mêmes; on les a nommées *inégalités périodiques*, pour les distinguer des inégalités séculaires, qui, d'après les calculs de Laplace, seraient aussi périodiques, mais dont les périodes beaucoup plus longues seraient indépendantes de la configuration mutuelle des planètes.

Les excentricités des ellipses planétaires sont variables, c'est-à-dire que ces ellipses s'approchent ou s'éloignent insensiblement de la forme circulaire. Les inclinaisons des ellipses sur l'écliptique ou sur un plan fixe, augmentent ou diminuent; les périhélies et les nœuds sont en mouvement. Les faibles valeurs séculaires de toutes ces variations, doivent-elles, en s'ajoutant à la suite des siècles, amener un changement considérable dans le système du monde? — Newton en eut la pensée, et supposant que le système planétaire ne renfermait pas en lui-même des éléments de conservation indéfinie, il croyait que Dieu devait intervenir de temps en temps pour réparer le désordre. Plusieurs savants penchaient fortement vers l'opinion de Newton. Laplace fit sortir de ses savantes analyses une conclusion contraire : il assura que le grand axe de chaque orbite et par suite, en vertu de la troisième loi de Képler, la durée de la révolution de chaque planète, est une quantité constante ou qui du moins n'est sujette qu'à de petits changements périodiques. Cette conséquence importante de l'analyse, qui entraînerait la constance des moyens mouvements des planètes, proviendrait de ce que les orbites planétaires ont une faible ellipticité et occupent des plans peu inclinés les uns sur les autres. Voici comment Laplace résume lui-même ses travaux sur cet intéressant sujet, dans l'*Exposition du système du monde :*

« Les ellipses planétaires ont-elles toujours été et seront-elles toujours à peu près circulaires? Quelques-unes des planètes n'ont-elles pas été originairement des comètes dont les orbes ont peu à peu approché du cercle, par l'attraction des autres planètes? La diminution de l'obliquité de l'écliptique continuera-t-elle au point de faire coïncider l'écliptique avec l'équateur, ce qui produisait l'égalité constante des jours et des nuits sur toute la terre? L'analyse répond à ces questions d'une manière satisfaisante. Je suis parvenu à démontrer que, quelles que soient les masses des planètes, par cela seul qu'elles se meuvent toutes dans le même sens, et dans des orbes peu excentriques et peu inclinés les uns aux autres, leurs inégalités séculaires sont périodiques et renfermées dans d'étroites limites, en sorte que le système planétaire ne fait qu'osciller autour d'un état moyen dont il ne s'écarte jamais que d'une très-petite quantité. Les ellipses des planètes ont donc toujours été et seront toujours presque circulaires; d'où il suit qu'aucune planète n'a été primitivement une comète, du moins si l'on n'a égard qu'à l'action mutuelle des corps du système planétaire. L'écliptique ne coïncidera jamais avec l'équateur, et l'étendue entière des variations de son inclinaison ne peut pas excéder trois degrés. »

Képler avait remarqué une lacune, un *hiatus*, entre les orbites de Mars et de Jupiter, et il imagina qu'il devait exister quelque planète entre ces deux astres. Cette prévision a paru justifiée par la découverte que firent successivement Piazzi de la planète Cérès, Harding de la planète Junon, et Olbers de la planète Vesta.

D'après les observations anciennes, comparées avec les observations modernes, il se produit une accélération

continuelle dans le mouvement de Jupiter, et au contraire une diminution continuelle dans le mouvement de Saturne. Laplace, ayant porté l'analyse sur cettte question, trouva que les moyennes vitesses de Saturne et de Jupiter sont entre elles à peu près comme 2 et 5; et il calcula qu'il résulte de l'attraction mutuelle de ces deux planètes, une inégalité dont la période est de 929 ans, et dont le maximum est d'environ 48′, dans la longitude de Saturne, et d'à peu près 20′ dans celle de Jupiter.

Ne pouvant concilier non plus les observations anciennes faites sur la planète Uranus avec les modernes, on soupçonna l'existence de quelque autre planète, jusqu'alors inaperçue, qui aurait influé sur la marche de celle-ci. M. Le Verrier, après avoir obtenu des valeurs assez précises des perturbations dont la théorie ne pouvait rendre compte, les introduisit dans les formules qui les expliquaient par l'existence d'une nouvelle planète, et obtint ainsi les éléments approximatifs de cet astre, dont il indiqua la position actuelle. En effet, peu de jours après cette indication, M. Galle, de Berlin, signalait une nouvelle planète qu'il venait d'apercevoir dans une position qui ne différait que d'un degré de celle que M. Le Verrier lui avait assignée. Cette planète a reçu le nom de Neptune, et aussi celui de Le Verrier.

Masses des planètes. — La masse d'une planète ayant un satellite, a été trouvée en supposant que le satellite, comparé à la planète, puisse être regardé comme une simple molécule matérielle. Connaissant les dimensions de l'orbite de la planète, on a obtenu la quantité dont le satellite tombe vers la planète en une seconde de temps, résultat d'où l'on a déduit la quantité dont le satellite tombe vers le soleil aussi en une seconde; mais cette

dernière quantité a pu aussi se déduire des circonstances du mouvement de la planète autour du soleil. La comparaison des deux nombres ainsi obtenus a fait connaître le rapport de la masse du soleil à celle de la planète.

Ce procédé se traduit analytiquement comme il suit : « Soient M, *m* et *m'* les masses respectives du soleil, de la planète et du satellite de cette dernière; soient *a* le demi-grand axe de l'orbite de la planète dans son mouvement relatif autour du soleil, et T la durée d'une révolution complète; et soient *a'* et T' les données analogues, répondant au mouvement apparent du satellite autour de la planète. On aura

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M+m), \quad \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m+m').$$

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{m+m'}{M+m} = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{T^2}{T'^2};$$

les masses des satellites étant extrêmement petites par rapport à celle de la planète, excepté la masse de la lune comparée à celle de la terre, on peut négliger *m'* devant *m*, et pour la même raison *m* devant M d'où résulte enfin

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{T^2}{T'^2},$$

formule qui peut servir à calculer le rapport de la masse de la planète à celle du soleil. Cette méthode donnerait $\frac{1}{1067}$ pour le rapport de la masse de Jupiter à

celle du soleil; mais plus tard on a trouvé que ce nombre était un peu trop grand et devait être remplacé par $\frac{1}{1070}$.

Quant aux planètes qui n'ont pas de satellites, on a déterminé leurs masses d'après les perturbations qu'elles produisent ou qu'elles éprouvent. L'observation de la marche réelle de Mars et de Vénus, par exemple, comparée avec la marche calculée d'après le mouvement elliptique, a donné des valeurs qui, introduites dans les formules où l'on fait entrer l'attraction exercée par les corps voisins, ont permis de calculer les masses troublantes. De même les perturbations causées par Mercure, notamment, sur la marche d'une comète périodique, telle que celle d'Encke, a conduit à calculer la masse de cette planète.

Pour ces calculs, je renvoie aux savantes analyses de Laplace.

J'admire la grandeur, la magnificence des travaux et des résultats dont je viens de présenter un résumé incomplet; mais néanmoins je ne puis y voir la preuve de la réalité des lois absolues qu'on admet pour expliquer l'accord des mouvements célestes. Je n'y vois pas que si tous les corps ne s'attiraient pas mutuellement, ne se portaient pas, par quelque force, les uns vers les autres, précisément en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances, l'accord observé ne saurait se produire. Je n'y vois pas que, sans les perturbations résultant de l'action que les planètes exercent les unes sur les autres, ces astres décriraient toujours des ellipses satisfaisant en tous points aux lois de Képler.

Les observations prises isolément ne donnent point, généralement du moins, des résultats exactement conformes aux principes reconnus, aux lois admises : on prend des moyennes de ces résultats, et ces moyennes elles-mêmes s'écartent plus ou moins de ces mêmes lois. Il peut y avoir, à cet égard, un accord suffisant pour qu'on puisse adopter pratiquement les lois supposées; mais enfin, quoi qu'on en dise, rien ne prouve qu'en les adoptant on est strictement dans le vrai. C'est plutôt le contraire qui me paraît vraisemblable, rationnel, quand je considère que, pour expliquer les phénomènes de la physique, il faut supposer aux molécules des forces très-différentes, très-inégales qui, je l'ai montré, ne sauraient se concilier avec une même loi absolue, à laquelle on veut les soumettre.

D'ailleurs, loin de connaître tout l'univers, nous n'avons qu'une connaissance très-incomplète des quelques astres qui constituent notre système planétaire, et c'est là une raison de plus pour ne pas assurer que toutes les molécules de la nature obéissent à une même loi, celle dite de la gravitation universelle; qu'elles sont sollicitées les unes vers les autres suivant des règles absolument invariables.

A ce sujet, je n'ai rien de mieux à dire que ce que j'ai dit dans une brochure de 1864, en réponse à un rapport de M. Trouessart au sujet de mes *Discussions sur les principes de la physique* :

« Il faut considérer que tout dans la nature paraît être dans un mouvement continuel, dans un flux et reflux qui ne permet pas d'asseoir les calculs sur des bases certaines. La position relative des astres varie continuellement. Ces milliers de soleils qui scintillent dans

l'espace ont sans doute aussi des planètes qui gravitent autour d'eux. Eux-mêmes, comme notre soleil, ne sont pas immobiles. Ceci est maintenant admis par tous les astronomes. Ils reconnaissent que le soleil se dirige, avec son cortége de planètes, vers la constellation d'Hercule. « Il est maintenant établi, dit Arago, que cer-
» taines étoiles ont un mouvement propre angulaire,
» apparent, appréciable, qu'elles ne gardent pas les
» mêmes positions les unes par rapport aux autres,
» qu'elles finiront à la longue par sortir des constel-
» lations où on les voit aujourd'hui, que la dénomi-
» nation de fixe ne leur convient pas. » (*Astronomie populaire*, t. II, p. 20). A ce sujet, Arago fait observer que « ces corps qu'on avait cru pouvoir considérer
» comme un exemple de la fixité, sont précisément
» ceux qui présentent les plus grandes vitesses dont on
» ait trouvé jusqu'ici la matière animée. » (Id., p, 227).

» Que les nébuleuses, la voie lactée soient ou non des amas d'étoiles ou de matière cosmique en voie de formation d'étoiles, de planètes, de comètes, elles changent de forme. « Dans la suite des siècles, dit encore Arago
« (id., p. 17), le pouvoir de concentration amènera
» inévitablement le fractionnement, la rupture, la dislo-
» cation de la voie lactée. »

» Il y a lieu d'admettre que les soleils se meuvent en gravitant vers quelque astre central, soit qu'il n'y en ait qu'un seul pour tous, soit qu'il y en ait plusieurs autour desquels gravitent autant de systèmes de soleils. Comme tout annonce que les soleils diffèrent par leur constitution et leur masse, il est à penser que leur gravitation vers leur astre central leur fait accomplir des révolutions différentes en direction, en vitesse, en durée,

Or, les planètes de notre système solaire, par leur attraction, agissent les unes sur les autres, de manière à produire des perturbations dans leurs révolutions autour de notre soleil, et même elles contribuent avec le soleil, médiatement et immédiatement, à modifier le cours, à faire varier les mouvements de leurs satellites. De même il est plausible que les soleils d'un système, aussi par leur attraction, déterminent des perturbations notables dans le cours de chacun d'eux, et qu'ils influent plus ou moins sur la marche des planètes, principalement de celles des systèmes de soleils dont ils font partie, et aussi sur la marche de leurs satellites ; et les modifications qu'ils y produisent, les astronomes ne sauraient les calculer, car, loin de pouvoir déterminer les révolutions des astres placés en dehors de notre système solaire, ils ne peuvent même connaître leur distance ni de notre soleil, ni de la terre et des autres planètes de ce système. Ajoutez que l'on ne connaît point d'une manière exacte ni la masse ni la forme de notre soleil, ni celles de ses planètes, y compris même celles de la terre, ni le nombre de ses planètes, loin de connaître le nombre, les masses et les formes des autres soleils et de leurs planètes. Ajoutez encore que les formes de tous les astres, déjà irrégulière sans doute, doivent varier incessamment, plus ou moins, et que les milieux où ils se meuvent ne sont point invariables, que sans doute ils changent dans la disposition, la densité, et même la composition des gaz, des fluides qu'ils peuvent contenir. Or, en présence de tout cet inconnu, d'une telle complication de causes indéterminables de variations dans la marche des astres, de nos planètes et de leurs satellites, est-il possible de calculer exactement des perturbations

astronomiques? Non certes! Si l'on arrive, dans quelques spéculations de ce genre, à des résultats qui, sans être d'une exactitude absolue, sont pratiquement satisfaisants, c'est que, apparemment, les causes fort multiples, connues ou inconnues, de perturbations, ont alors une influence résultante à peu près égale à celle des causes qu'on croit bien connaître et qu'on fait entrer dans le calcul. Toujours est-il que je ne saurais point regarder comme une confirmation absolue de la loi prétendue les résultats à peu près exacts qu'on obtient, notamment l'accomplissement des prédictions relatives aux éclipses, quand je vois clairement que le calcul n'a point tenu compte de toutes les causes plausibles de variations, de perturbations produites dans le cours des astres considérés. Les causes possibles de cet ordre sont innombrables. Rigoureusement, dans l'hypothèse de l'attraction universelle, une molécule ne peut exécuter le plus petit mouvement, sans entraîner quelque changement dans la disposition de toutes les autres

» La raison dit bien que les mêmes molécules placées exactement dans le même milieu, soumises absolument aux mêmes conditions sous tous les rapports, se comportent exactement aussi de la même manière : même cause, même effet. Mais, hors ce cas là, qui sans doute ne saurait se présenter dans la nature, où la disposition de la matière varierait incessamment, on ne peut rigoureusement rien prédire ; car on ne peut pas rationnellement affirmer que quelque cause extraordinaire ne viendra pas s'opposer à la réalisation du phénomène prédit. Ainsi, qui peut assurer, avec la raison, que le cours des astres, de notre soleil, par exemple, ne sera pas bientôt, à tel instant, considérablement troublé, arrêté même

par quelque conflit sidéral, par quelque bouleversement céleste ?

» On dira que du moins les plus grandes probabilités sont pour la réalisation des phénomènes prévus : soit, mais ce qu'on appelle une probabilité n'est pas donné par la raison même : elle ne dit pas que telle chose est probable ou ne l'est pas. Le mot *probabilité* est un de ceux qui couvrent notre ignorance. Le principe des probabilités une fois admis par hypothèse, on peut, il est vrai, fonder des calculs mathématiques sur ce principe, mais en soi il n'est pas rationnel. J'ai donné sur ce point des explications plus étendues dans mon livre de mathématiques. »

On a beaucoup discuté sur l'origine du monde, sur la cause réelle de la formation des planètes, des mouvements primitifs du système planétaire. A ce sujet, on paraît généralement admettre l'hypothèse de Laplace que je vais reproduire :

» Quelle que soit, dit-il (1), la nature de cette cause, puisqu'elle a produit ou dirigé les mouvements des planètes, il faut qu'elle ait embrassé tous ces corps, et, vu la distance prodigieuse qui les sépare, elle ne peut avoir été qu'un fluide d'une immense étendue. Pour leur avoir donné, dans le même sens, un mouvement presque circulaire autour du soleil, il faut que ce fluide ait environné cet astre comme une atmosphère. La considération des mouvements planétaires nous conduit donc à penser qu'en vertu d'une chaleur excessive, l'atmosphère du soleil s'est primitivement étendue au delà des orbes de toutes les planètes, et qu'elle s'est resserrée successivement jusqu'à ses limites actuelles.

(1) *Exposition du système du monde*, note VII et dernière.

» Dans l'état primitif où nous supposons le soleil, il ressemblait aux nébuleuses que le télescope nous montre, composées d'un noyau plus ou moins brillant, entouré d'une nébulosité qui, en se condensant à la surface du noyau, le transforme en étoiles. Si l'on conçoit, par analogie, toutes les étoiles formées de cette manière, on peut imaginer leur état antérieur de nébulosité, précédé lui-même par d'autres états dans lesquels la matière nébuleuse était de plus en plus diffuse, le noyau étant de moins en moins lumineux. On arrive ainsi, en remontant aussi loin qu'il est possible, à une nébulosité tellement diffuse que l'on pourrait à peine en soupçonner l'existence.

» Depuis longtemps la disposition particulière de quelques étoiles visibles à la vue simple a frappé des observateurs philosophes. Mitchel a déja remarqué combien il est peu probable que les étoiles des pléiades, par exemple, aient été resserrées, dans l'espace étroit qui les renferme, par les seules chances du hasard, et il en a conclu que ce groupe d'étoiles et les groupes semblables que le ciel nous présente sont les effets d'une cause primitive ou d'une loi générale de la nature. Ces groupes sont un résultat nécessaire de la condensation des nébuleuses à plusieurs noyaux; car il est visible que la matière nébuleuse étant sans cesse attirée par ces noyaux divers, ils doivent former à la longue un groupe d'étoiles pareil à celui des pléiades. La condensation des nébuleuses à deux noyaux formera semblablement des étoiles très-rapprochées, tournant l'une autour de l'autre, telles que les étoiles doubles dont on a déja reconnu les mouvements respectifs.

» Mais comment l'atmosphère solaire a-t-elle déter-

miné les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites? Si ces corps avaient pénétré profondément dans cette atmosphère, sa résistance les aurait fait tomber sur le soleil. On peut donc conjecturer que les planètes ont été formées à ses limites successives, par la condensation des zones de vapeurs qu'elle a dû, en se refroidissant, abandonner dans le plan de son équateur.

» Rappelons les résultats que nous avons donnés dans le dixième chapitre du livre précédent (1). L'atmosphère du soleil ne peut pas s'étendre indéfiniment; sa limite est le point où la force centrifuge due à son mouvement de rotation balance la pesanteur; or, à mesure que le refroidissement resserre l'atmosphère et condense à la surface de l'astre les molécules qui en sont voisines, le mouvement de rotation augmente; car, en vertu du principe des aires, la somme des aires décrites par le rayon vecteur de chaque molécule du soleil et de son atmosphère, et projetées sur le plan de son équateur, étant toujours la même, la rotation doit être plus prompte quand ces molécules se rapprochent du centre du soleil. La force centrifuge, due à ce mouvement, devenant ainsi plus grande, le point où la pesanteur lui est égale est plus près de ce centre. En supposant donc, ce qu'il est naturel d'admettre, que l'atmosphère s'est étendue, à une époque quelconque, jusqu'à sa limite, elle a dû, en se refroidissant, abandonner les molécules situées à cette limite, et aux limites successives produites par l'accroissement de la rotation du soleil. Ces molécules abandonnées ont continué de circuler autour de cette astre, puis-

(1) Voir liv. IV, chap. X.

que leur force centrifuge était balancée par leurs pesanteur.

» Mais cette inégalité n'ayant point lieu par rapport aux molécules atmosphériques placées sur les parallèles à l'équateur solaire, celles-ci se sont rapprochées par leur pesanteur de l'atmosphère, à mesure qu'elle se condensait, et elles n'ont cessé de lui appartenir qu'autant que, par ce mouvement, elles se sont rapprochées de cet équateur.

» Considérons maintenant les zones des vapeurs successivement abandonnées. Ces zones ont dû, selon toute vraisemblance, former par leur condensation et l'attraction mutuelle de leurs molécules, divers anneaux concentriques de vapeurs circulant autour du soleil. Le frottement mutuel des molécules de chaque anneau a dû accélérer les unes et retarder les autres jusqu'à ce qu'elles aient acquis un même mouvement angulaire. Ainsi les vitesses réelles des molécules plus éloignées du centre de l'astre ont été plus grandes. La cause suivante à dû contribuer encore à cette différence de vitesse : les molécules les plus distantes du soleil et qui, par les effets du refroidissement et de la condensation, s'en sont rapprochées pour former la partie supérieure de l'anneau, ont toujours décrit des aires proportionnelles aux temps, puisque la force centrale dont elles étaient animées a été constamment dirigée vers cet astre ; or, cette constance des aires exige un accroissement de vitesse à mesure qu'elles s'en sont rapprochées. On voit que la même cause a dû diminuer la vitesse des molécules qui se sont élevées vers l'anneau pour former sa partie inférieure.

» Si toutes les molécules d'un anneau de vapeurs continuaient de se condenser sans se désunir, elles for-

meraient à la longue un anneau liquide ou solide. Mais la régularité que cette formation exige dans toutes les parties de l'anneau et dans leur refroidissement, a dû rendre ce phénomène extrêmement rare. Aussi le système solaire n'en offre-t-il qu'un seul exemple, celui des anneaux de Saturne. Presque toujours chaque anneau a dû se rompre en plusieurs masses qui, mues avec des vitesses très-peu différentes, ont continué de circuler à la même distance autour du soleil. Ces masses ont dû prendre une forme sphéroïdique, avec un mouvement de rotation dirigé dans le sens de leur révolution, puisque leurs molécules inférieures avaient moins de vitesse réelle que les supérieures; elles ont donc formé autant de planètes à l'état de vapeurs. Mais si l'une d'elles a été assez puissante pour réunir successivement, par son attraction, toutes les autres autour de son centre, l'anneau de vapeur aura été ainsi transformé dans une seule masse sphéroïdique de vapeur, circulant autour du soleil, avec une rotation dirigée dans le sens de sa révolution. Ce dernier cas a été le plus commun : cependant le système solaire nous offre le premier cas, dans les quatre petites planètes qui se meuvent entre Jupiter et Mars; à moins qu'on ne suppose, avec M. Olbers, qu'elles formaient primitivement une seule planète, qu'une forte explosion a divisée en plusieurs parties animées de vitesses différentes.

» Maintenant, si nous suivons les changements qu'un refroidissement ultérieur a dû produire dans les planètes en vapeur, dont nous venons de concevoir la formation, nous verrons naître au centre de chacune d'elles un noyau s'accroissant sans cesse, par la condensation de l'atmosphère qui l'environne. Dans cet état, la pla-

nète ressemblait parfaitement au soleil et à l'état de nébuleuse où nous venons de le considérer; le refroidissement a donc dû produire aux diverses limites de son atmosphère, des phénomènes semblables à ceux que nous avons décrits, c'est-à-dire des anneaux et des satellites circulant autour de son centre, dans le sens de son mouvement de rotation, et tournant dans le même sens sur eux-mêmes. La distribution régulière de la masse des anneaux de Saturne autour de son centre et dans le plan de son équateur, résulte naturellement de cette hypothèse, et sans elle devient inexplicable : ces anneaux me paraissent être des preuves toujours subsistantes de l'extension primitive de l'atmosphère de Saturne et de ses retraites successives. Ainsi les phénomènes singuliers du peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites, du peu d'inclinaison de ces orbes à l'équateur solaire, et de l'identité du sens du mouvement de rotation et de révolution de tous ces corps avec celui de la rotation du soleil, découlent de l'hypothèse que nous proposons et lui donnent une grande vraisemblance.

» Si le système solaire s'était formé avec une parfaite régularité, les orbites des corps qui le composent seraient des cercles dont les plans, ainsi que ceux des divers équateurs et des anneaux coïncideraient avec le plan de l'équateur solaire. Mais on conçoit que les variétés sans nombre qui ont dû exister dans la température et la densité des diverses parties de ces grandes masses ont produit les excentricités de leurs orbites, et les déviations de leurs mouvements, du plan de cet équateur.

» Dans notre hypothèse, les comètes sont étrangères au système planétaire. En les considérant, ainsi que

nous l'avons fait, comme de petites nébuleuses errantes de systèmes en systèmes solaire, et formées par la condensation de la matière nébuleuse, répandue avec tant de profusion dans l'univers, on voit que, lorsqu'elles parviennent dans la partie de l'espace où l'attraction du soleil est prédominante, il les force à décrire des orbes elliptiques ou hyperboliques. Mais leurs vitesses étant également possibles suivant toutes les directions, elles doivent se mouvoir indifféremment dans tous les sens et sous toutes les inclinaisons à l'écliptique; ce qui est conforme à ce que l'on observe. Ainsi la condensation de la matière nébuleuse, par laquelle nous venons d'expliquer les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites dans le même sens et sur des plans peu différents, expliquent également pourquoi les mouvements des comètes s'écarte de cette loi générale.

» L'attraction des planètes, et peut-être encore la résistance des milieux éthérés, a dû changer plusieurs orbes cométaires, dans des ellipses dont le grand axe est beaucoup moindre que le rayon de la spère d'activité du soleil. On peut croire que ce changement a eu lieu pour l'orbe de la comète de 1759, dont le grand axe ne surpasse que 35 fois la distance du soleil à la terre. »

J'ai déjà critiqué cette théorie de Laplace dans mon livre sur le *Soleil*, p. 250.

Les considérations au moyen desquelles l'auteur veut établir que l'atmosphère solaire a dû successivement abandonner les vapeurs placées à sa limite à mesure qu'elle s'est refroidie, condensée, ne me paraissent pas pertinentes. Si le refroidissement a condensé les molécules de l'atmosphère solaire, est-ce qu'il n'a pas condensé aussi les vapeurs qui s'y trouvaient? Si cela est, la séparation,

l'abandon de ces vapeurs a pu n'avoir pas lieu. Pour que l'atmosphère solaire ait dû abandonner des vapeurs à ses limites successives en raison du refroidissement, il a fallu que cette atmosphère se condensât plus que les vapeurs qui y étaient répandues ; or, cela n'est pas vraisemblable, d'après ce que nous voyons sur la terre, dans les phénomènes atmosphériques.

Il ne me paraît pas admissible que les anneaux supposés par Laplace, en se condensant, deviennent des sphéroïdes. S'ils ne sont pas d'une constitution homogène, leur condensation pourra sans doute déterminer leur division en plusieurs corps séparés, qui ensuite tendront à se réunir par leur attraction mutuelle; mais alors généralement il se formera soit un anneau entier plus dense que le précédent, soit une portion d'anneau, non un sphéroïde.

Il est plus plausible que la nébuleuse d'où sont sortis notre soleil et ses planètes, avait primitivement plusieurs noyaux, un noyau solaire et des noyaux planétaires. De cette manière, on expliquera aisément la formation de ces astres, par la concentration résultant du refroidissement et de l'attraction qui se sont produits autour du centre de chaque noyau.

On objectera que l'hypothèse ne rendrait pas compte de ce que toutes les planètes exécutent les mouvements de rotation et de translation dans un même sens, d'occident en orient. J'ai présenté et je reproduirai bientôt une hypothèse qui explique cette coïncidence; mais auparavant voyons si l'hypothèse de Laplace, à cet égard, est bien satisfaisante.

Comment cette hypothèse rendrait-elle compte de ce fait que les planètes tournent, se meuvent dans le même

sens. dans le sens direct ? Ce serait en admettant que dans le principe toute la nébuleuse de notre système tournait à la fois dans ce sens, et que les planètes formées des anneaux concentriques de la nébuleuse ont ensuite gardé ce mouvement. Mais alors, pourquoi le mouvement rotatoire primitif des anneaux a-t-il pu se modifier au point de produire les deux mouvements de rotation et de translation qu'exécutent les planètes? Pourquoi, dans l'hypothèse, les planètes provenant des anneaux n'ont-elles pas tourné autour de l'astre central comme la lune tourne autour de la terre, c'est-à-dire en lui présentant toujours la même face ? Comment les mouvements rotatoires primitifs des anneaux, qui, selon toute probabilité, étaient angulairement à peu près aussi lents que celui du corps central, sont-ils devenus bien plus rapides, puisque le soleil tourne sur lui-même à peu près en 25 jours et demi, et que Mercure, Vénus, la Terre, Mars acccomplissent leur rotation à peu près en 24 heures, Jupiter et Saturne à peu près en 10 heures, plus ou moins ; en sorte que là il s'est passé le contraire de ce qui a eu lieu pour la terre et son satellite qui tourne bien moins vite que notre globe ? Pourquoi, dans le système de l'auteur, Jupiter et Saturne tournent-ils sur eux-mêmes avec bien plus de rapidité que ne le font les planètes qui leur sont inférieures, Mars, la Terre, Vénus, Mercure? Il faut convenir que, sous ces rapports, loin de faciliter la solution du problème, l'hypothèse de Laplace le complique et l'embarrasse singulièrement.

Et puis, dans ce système, on ne dit pas et l'on ne voit pas comment, par quelle cause se serait établie la rotation primitive de la nébuleuse totale d'où serait sorti notre système solaire.

Pour expliquer ce mouvement rotatoire, on a dit que, pour qu'un corps sphérique prenne ce mouvement, il suffit qu'il soit soumis à une force appliquée dans une direction qui ne passe pas par son centre. On a invoqué, à cet égard, la théorie des couples, on a dit que la force appliquée excentriquement à ce corps donnait naissance à un couple dont l'action devait le faire tourner sur son centre. J'ai réfuté cette doctrine en renversant la théorie des couples.

Il se peut toutefois qu'une seule force appliquée excentriquement à une sphère, la détermine à tourner sur elle-même, alors même qu'elle est libre d'ailleurs ; mais cela suppose que non-seulement le corps n'est point absolument rigide, inflexible, inextensible, mais qu'au contraire ses molécules ont une grande mobilité, une certaine indépendance qui fasse que le corps puisse changer de forme, bien que cependant la cohésion moléculaire n'y soit point nulle.

Supposons, par exemple, qu'une sphère liquide ou gazeuse, libre d'ailleurs, soit soumise à une force P (fig. 85) appliquée, non au centre C, mais, perpendiculairement à un diamètre AB, au point *q* que je suppose être une molécule. Q étant tirée par la force P dans la direction de cette force, entraînera avec elle, avec plus ou moins de vitesse, selon leur position, les molécules placées dans la même direction en deçà et au-delà de *q*, et par suite, notamment, les molécules r, s, t, u, etc., r', s', t', u', etc., r'', s'', t'', u'', etc...., situées hors et du côté du centre C, de telle sorte que la sphère prendra un mouvement général de rotation dans le sens de la flèche. On conçoit du moins que les molécules d'une sphère puissent être entre elles dans des conditions de liaison telles qu'elles

doivent s'entraîner réciproquement de manière à produire la rotation de ce corps, s'il est soumis à une force dirigée excentriquement comme je viens de le supposer.

Mais rien ne porte à penser que c'est uniquement par une action de ce genre que primitivement le soleil a pris le mouvement rotatoire qu'il s'agit d'expliquer. Quelle serait d'ailleurs la force qui aurait agi excentriquement sur lui? Pourquoi se serait-elle exercée sur cet astre plutôt d'un côté que de l'autre? Une telle hypothèse ne saurait satisfaire.

Dans une note mise à la suite de mon livre intitulé : *Qu'est-ce que le Soleil?* j'ai présenté une hypothèse qui me paraît bien plausible et que je vais reproduire. Elle fait concevoir que les planètes de notre système se meuvent dans le même sens, que leurs mouvements de rotation et de translation aient dû s'établir de droite à gauche, de l'occident à l'orient.

Supposons que primitivement une planète P (fig. 86) ait été un sphéroïde de matière fluide, gazeuse ou liquide. Plaçons loin d'elle un astre ou amas de matière S, et dans une autre direction un autre axe ou amas de matière T. Admettons que la planète soit inégalement attirée par ces masses, que la force attractive de S, par exemple, excède de beaucoup celle de T. Si chacune de ces forces agissait isolément sur la planète, la matière fluide de celle-ci serait renflée du côté D dans la direction BDT, et elle le serait davantage du côté A dans la direction CAS, à cause de la prédominance attractive de S. Mais le résultat complexe de ces renflements moléculaires inégaux, ou pour mieux dire, des forces qui les auraient déterminées, si elles eussent été isolées dans leur action, sera de produire une rotation de la matière liquide ou

gazeuse de la planète, et cela dans le sens de la flèche, de D en A, à cause de la même prédominance de l'attraction de S. De plus, la planète attirée dans deux directions différentes marchera suivant une résultante R, en même temps qu'elle tournera plus ou moins vite sur elle-même dans le sens de la flèche. Ainsi, l'hypothèse explique à la fois le mouvement de rotation et le mouvement de translation de la planète.

Si le soleil et les planètes sont sortis de diverses nébuleuses très-rapprochées les unes des autres, ou d'une nébuleuse à divers centres ou noyaux, ayant reçu originairement un mouvement de rotation et de translation, ce qui me paraît vraisemblablo, la production de ces mouvements imprimés à la fois et dans le même sens aux divers groupes cosmiques s'expliquera en supposant deux forces attractives inégales, s'exerçant sur chacun dans deux directions différentes, comme je viens de le faire dans l'hypothèse de la production du mouvement particulier d'une planète. Comme ces groupes se trouvaient dans des positions différentes les uns à l'égard des autres et relativement aux siéges des deux forces attractives que je suppose; comme, d'ailleurs, ils différaient sans doute plus ou moins dans leur masse, leur constitution, leur forme, on conçoit que leurs mouvements de rotation aient dû différer aussi plus ou moins dans leur intensité, et que leurs mouvements de translation ne se soient pas effectués avec la même vitesse ni précisément dans la même direction; on conçoit que ces mouvements aient été influencés, modifiés plus ou moins considérablement par les gravitations particulières s'établissant alors entre ces corps en raison de leurs masses, distances et constitutions respectives, de manière à faire

tourner les planètes autour du soleil, les satellites autour des planètes avec des vitesses diverses de rotation et de translation.

Les anneaux de Saturne ne peuvent être dus qu'à une disposition particulière que devait avoir primitivement la matière qui les compose, et aussi à la nature même de cette matière et à celle du milieu dans lequel elle s'est trouvée.

Les satellites des planètes, comme les planètes et le soleil, sont résultés de noyaux, de centres particuliers vers lesquels se sont portées des parties plus ou moins considérables de la matière composant la nébuleuse.

Les satellites d'Uranus offrent une particularité notable, qui ne saurait s'expliquer dans l'hypothèse de Laplace que j'ai plus haut reproduite et critiquée. Ils paraissent tourner en sens contraire au mouvement de cette planète. Mon hypothèse peut se prêter à l'explication de ce fait exceptionnel. Il provient, sans doute, de quelque attraction particulière qui se sera trouvée agir sur les satellites, alors qu'ils étaient très-rapprochés les uns des autres du côté où elle s'exerçait, et qui, jointe à l'attraction de la planète même d'Uranus, aura déterminé la rotation des satellites autour d'elle. Une action particulière a pu être assez forte pour produire cet effet partiel, sans l'être assez pour déterminer le sens des mouvements des autres astres, bien que, d'ailleurs, elle ait pu exercer aussi une influence sur leurs mouvements; car il y a une sorte de solidarité entre tous les astres de l'univers; ils influent tous plus ou moins les uns sur les autres sous divers rapports. Au reste, la rotation des satellites d'Uranus est peu accentuée, car ils paraissent présenter constamment la même face à leur planète. Or,

la faible intensité de leur rotation aide encore à concevoir qu'elle se soit établie comme je le suppose.

Contre mon explication, on m'a objecté que les astres s'attirent comme si toutes leurs molécules étaient réunies à leurs centres respectifs, qu'ainsi on ne peut admettre mon hypothèse, suivant laquelle, primitivement, l'attraction se serait exercée divisément, à des degrés divers, sur les diverses parties de l'astre attiré ; mais cette objection se trouve réfutée par la critique que j'ai faite plus haut relativement à l'attraction mutuelle de deux sphères. J'ai montré que, même en admettant qu'une sphère attire comme si toute sa masse était réunie à son centre, il ne s'ensuivrait point qu'elle serait elle-même attirée de cette manière. Si la sphère attirée est solide, la liaison de ses parties peut déterminer le corps entier à se mouvoir à peu près comme si la totalité était soumise à une force sensiblement égale à celle que prendrait une molécule centrale, libre d'ailleurs, si elle était soumise à la force attractive supposée en raison inverse du carré de la distance ; mais il n'en sera point de même si la sphère n'est pas solide, si, liquide ou gazeuse, ses parties sont peu liées entre elles. Alors les parties plus voisines du siége de la force attractive, c'est-à-dire du corps attirant, obéiront plus à son action que les parties qui en seront à une plus grande distance. En ce cas, elles pourront donc être loin de n'avoir qu'un même mouvement. Cela, d'ailleurs, ai-je dit, dépendra de diverses circonstances : de l'étendue de la phère attirée, de son degré d'élasticité, etc.

Au surplus, cette distinction est, à vrai dire, admise, du moins par ceux qui, pour expliquer le phénomène des marées par l'action de la lune et du soleil sur les

eaux de la mer, adoptent l'explication de Newton ; car, dans cette explication, on suppose que la partie solide du globe terrestre est attirée comme si toute sa masse était réunie à son centre, tandis que la couche liquide qui couvre la croûte terrestre et constitue les mers, est plus ou moins attirée et mise en mouvement par l'attraction de la lune et du soleil, selon que ses parties sont plus ou moins éloignées de ces astres. Il y a donc, sous ce rapport, accord entre mon hypothèse et l'explication généralement admise des marées.

Laplace, dans sa *Mécanique céleste*, s'est attaché à montrer que, dans la seule loi de la pesanteur, se trouvait la source de toutes les inégalités du mouvement lunaire.

Parmi les inégalités périodiques de ce mouvement en longitude, est celle qui dépend de la simple distance angulaire de la lune au soleil, et qui répand un grand jour sur la parallaxe solaire. Laplace l'a déterminée en ayant égard aux quantités du cinquième ordre, et même aux perturbations de la terre par la lune ; et il est arrivé, pour la parallaxe du soleil, à un résultat conforme à celui qui avait été obtenu par plusieurs astronomes au moyen des observations du dernier passage de Vénus sur cet astre :

« Une autre inégalité non moins importante, dit Laplace, est celle qui dépend de la longitude du nœud de la lune. L'observation l'avait indiquée à Mayer, et Masson l'avait fixé à 23″765 ; mais comme elle ne paraissait pas résulter de la théorie de la pesanteur, la plupart des astronomes la négligeaient ; cette théorie approfondie m'a fait voir qu'elle a pour cause l'aplatissement de la terre. Burg l'a trouvée, par un grand nombre d'obser-

vations de Masqueline, égale à 20″987, ce qui répond à l'aplatissement $\frac{1}{305,05}$ »

Pour ne rien omettre de ce qui peut influer sur le mouvement de la lune, Laplace a considéré l'action directe des planètes sur ce satellite, et il a reconnu qu'elle est très-peu sensible. « Mais, dit-il, le soleil, en lui transmettant leur action sur les éléments de l'orbe terrestre, rend leur influence sur les mouvements lunaires très-remarquable et beaucoup plus grande que sur ces éléments eux-mêmes ; en sorte que la *variation séculaire* de l'excentricité de l'orbe terrestre est beaucoup plus sensible dans le mouvement de la lune que dans celui de la terre. C'est ainsi que l'action de la lune sur la terre, d'où résulte dans le mouvement de cette planète l'inégalité connue sous le nom *d'équation lunaire*, est, si je puis m'exprimer ainsi, réfléchie à la lune par le moyen du soleil, mais affaiblie à peu près dans le rapport de cinq à neuf. Cette considération nouvelle ajoute à l'action des planètes sur la lune des termes plus considérables que ceux qui dépendent de leur action directe. Je développe les principales inégalités lunaires résultantes des actions directes et indirectes des planètes sur la lune : vu la précision à laquelle on a porté les tables de la lune, il serait inutile d'y introduire ces inégalités.

» La parallaxe de la lune, ajoute Laplace, l'excentricité et l'inclinaison de son orbite à l'écliptique vraie, et généralement les coefficients de toutes les inégalités linéaires, sont pareillement assujettis à des variations séculaires ; mais elles sont jusqu'à présent très-peu sensibles. »

Laplace, de ses recherches analytiques sur l'influence que l'état de fluidité des eaux de la mer peut avoir sur le mouvement du globe terrestre considéré dans son ensemble, a conclu que cet état de fluidité n'altère pas sensiblement l'uniformité du mouvement de rotation du globe.

« Il est donc généralement vrai, dit-il (Ch. Ier, Tome V, de sa *Mécanique céleste*), que, de quelque manière que les eaux de la mer réagissent sur la terre, soit par leur attraction ou par leur pression, ou par leur frottement et par les diverses résistances qu'elles éprouvent, elles communiquent à l'axe de la terre un mouvement à très-peu près égal à celui qu'il recevrait de l'action du soleil et de la lune sur la mer, si elle venait à former une masse solide avec la terre. Nous avons fait voir que le moyen mouvement de rotation de la terre est uniforme, dans la supposition où cette planète est entièrement solide, et l'on vient de voir que la fluidité de la mer et de l'atmosphère ne doit point altérer ce résultat. »

Dans une précédente analyse, il avait dit : « Les phénomènes de la précession et de la nutation sont exactement les mêmes que si la mer formait une masse solide avec le sphéroïde qu'elle recouvre. Ce théorème a lieu quelles que soient les irrégularités de la profondeur de la mer, et les résistances qu'elle éprouve dans ses oscillations. Les courants de la mer, les fleuves, les tremblements de terre et les vents n'altèrent pas la rotation de la terre. »

M. Delaunay, se séparant de Laplace sur la question des marées, croit et professe que l'action de la lune et du soleil sur les eaux de la mer a l'effet de ralentir

la rotation de la terre, et il s'explique, à ce point de vue, une partie de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la lune.

Voici, à ce sujet, un résumé d'une note que cet astronome a présentée à l'Académie des Sciences (Séance du 11 décembre 1865) :

« L'uniformité du mouvement de rotation de la terre ou, ce qui revient au même, la constance de la durée du jour sidéral, a été admise jusqu'à présent par tous les astronomes. C'est sur cette uniformité de la rotation de notre globe qu'est basée la mesure du temps en astronomie.

» Halley a constaté une accélération séculaire dans le moyen mouvement de la lune. Laplace a reconnu que cette accélération séculaire de la lune était due à la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de la terre. La valeur de l'équation séculaire de la lune produite par la cause que Laplace avait trouvée, a été regardée pendant longtemps comme présentant un suffisant accord avec les indications fournies par les observations. Récemment, M. Adams, en rectifiant le calcul de l'équation séculaire due à cette cause, a montré que la vraie valeur de cette équation séculaire est notablement plus petite qu'on ne l'avait cru avant lui. Le résultat obtenu par M. Adams a été confirmé : l'accélération séculaire du moyen mouvement de la lune indiqué par les observations est notablement plus grande que celle qu'occasionne la variation de l'excentricité de l'orbite de la terre. Il doit donc y avoir une autre cause à laquelle on puisse attribuer la partie excédante de l'accélération séculaire dont il s'agit, c'est-à-dire la partie dont la cause trouvée par Laplace ne peut pas rendre compte. Cette cause doit être dans un ralentissement du jour sidéral, par consé-

unes avec les autres, la surface ellipsoïdale d'équilibre reste la même; mais la présence des continents interposés entre ces mers, en gênant considérablement le mouvement en vertu duquel les eaux tendent à se disposer suivant cette surface ellipsoïdale, change complétement la forme que la surface des eaux prend à chaque instant; au lieu d'une figure d'ensemble allongée comme l'ellipsoïde d'équilibre, on a une figure très-irrégulière résultant des mouvements d'oscillation que la lune produit dans les diverses parties de l'Océan, et qui se combinent les uns avec les autres par la propagation successive de chacun de ses mouvements partiels dans les mers environnantes. Mais quelle que soit l'irrégularité d'ensemble que présente la surface totale des eaux répandues sur le globe terrestre, l'existence des frottements et des résistances de toutes sortes que les eaux éprouvent dans leurs mouvements amène un résultat analogue à celui indiqué plus haut dans le cas où la terre serait entièrement couverte par les eaux de la mer : le mouvement oscillatoire général qui se produit présente dans tous ses détails un certain retard sur ce qu'il serait sans l'existence des résistances que rencontre la marche des eaux. »

Revenant au cas simple où la mer recouvre la terre de toutes parts, l'auteur considère que l'action de la lune sur la masse totale de la terre est modifiée par suite de la forme allongée que cette même action de la lune fait prendre à la surface de la mer.

En vertu de cette forme, pense-t-il, il existe comme deux protubérances liquides situées vers les extrémités d'un diamètre terrestre qui se dirige, non pas vers la lune même, mais vers un point du ciel situé à une cer-

taine distance de cet astre, du côté de l'orient. Ces deux protubérances sont inégalement éloignées de la lune ; l'une d'elles est plus près de ce corps attirant que le centre de la terre, et l'autre en est au contraire plus éloignée. *Si l'on se reporte à la manière dont on obtient la portion de l'action lunaire qui occasionne le phénomène des marées, on verra que la première de ces protubérances est comme attirée par la lune, et la seconde au contraire comme repoussée par le même astre : il en résulte donc un couple appliqué à la masse du globe terrestre, et tendant à le faire tourner en sens contraire du sens dans lequel il tourne réellement, couple qui doit produire d'après cela un ralentissement dans la rotation de ce globe.*

Supposant que le retard de la pleine mer sur le passage de la lune au méridien soit de trois heures, ce qui exige que le diamètre aux deux extrémités duquel sont les deux protubérances liquides fasse un angle de 45 degrés avec la ligne allant du centre de la terre au centre de la lune, M. Delaunay, dans cette hypothèse et celle du couple qu'il admet, arrive, par le calcul, à la conclusion suivante :

« *Les forces perturbatrices auxquelles sont dues les oscillations périodiques de la surface des mers (phénomènes des marées), en exerçant leur action sur les intumescences liquides qu'elles occasionnent, déterminent un ralentissement progressif du mouvement de rotation de la terre, et produisent ainsi une accélération apparente sensible dans le moyen mouvement de la lune.* »

Je pense que, sur cette question, ni Laplace, ni M. Delaunay ne sont complètement dans le vrai. Le premier me paraît s'écarter beaucoup de la vérité, sous plusieurs rapports.

Rappelons d'abord comment on explique le phénomène des marées, d'après la théorie généralement admise du célèbre Newton.

Soient (fig. 5) T la terre, et L la lune, ABCD l'équateur de la terre. D'après ce principe que l'attraction de deux sphères solides est la même que si leurs masses étaient réunies à leurs centres, si A est une molécule d'eau, étant plus voisine de la lune que le centre T de la terre, elle se trouve plus attirée par la lune que par la partie solide de la terre; mais elle se maintient par son poids qui subit seulement une petite diminution. De même, la molécule C, étant plus éloignée de L que T, est moins attirée par notre satellite, et ainsi la terre tend à s'en séparer; mais la pesanteur maintient la molécule à sa surface, et l'effet est le même que si cette molécule perdait une faible partie de son poids. Les points B et D se trouvent sensiblement à la même distance de la lune que T, et par suite n'éprouvent pas de changements de poids. La lune agit de même sur les molécules intermédiaires, telle que E, mais avec moins d'intensité, car son action est oblique, et la différence entre les distances LT, LE est moindre. Il s'ensuit que la mer doit se gonfler en A et C, et se déprimer en B et D. La terre tournant sur elle-même, il doit se former une vague considérable peu élevée relativement à sa base le long du cercle ABCD. Six heures après le passage de A devant la lune, B prend sa place; le renflement a lieu dans le sens BD, et la dépression en A et C; il y a pleine mer en B et D, basse mer en A et C.

Cette explication laisse à désirer; elle en demande une autre.

D'abord ce principe que deux sphères solides s'attirent

comme si toute leur masse était réunie à leur centre, n'est pas rigoureusement applicable ici, car sans doute la terre n'est pas complétement solide, la majeure partie de sa masse est liquide; d'ailleurs, je le répète, le principe, pour être exact, impliquerait que les sphères sont pleines, ne sont pas composées de parties à distance, de molécules mobiles. Toutefois, l'écorce terrestre étant solide, ses parties étant généralement fort adhérentes les unes aux autres, on peut, sans erreur sensible, supposer que la lune et le soleil attirent notre globe à peu près comme si toutes ses molécules étaient à son centre. Raisonnons donc dans cette hypothèse.

La lune attirera plus la terre que l'eau placée du côté C, et la terre tendra à se séparer de cette partie du liquide. Mais l'eau doit suivre la terre dans ce retrait, car ce liquide ne peut rester suspendu à une certaine distance de la surface terrestre. Comment donc peut-il se faire et peut-on dire que la pesanteur de l'eau est comme diminuée, et que, par suite, elle doit se trouver plus élevée en ce cas? Pour concevoir ce résultat, il faut considérer que l'eau suit la terre dans son mouvement de retrait, mais non point avec une égale vitesse dans les diverses parties du liquide. Les molécules les plus voisines de la surface terrestre sont bien plus fortement entraînées que les plus distantes de cette surface, de telle sorte que la terre se trouve notablement éloignée des molécules supérieures de la couche, avant que celles-ci suivent sensiblement le mouvement de retrait. Or, par cet éloignement, leur pesanteur se trouve diminuée; elles pressent moins les molécules inférieures. Le phénomène se prolongeant, se renouvelant pendant un certain temps, il en résulte que le niveau de la masse

liquide, en cette partie, se trouve à une plus grande hauteur par rapport à la surface terrestre. En réalité, l'eau ne s'élève pas en C, c'est la terre qui se retire, et l'effet apparent est le même que si la mer s'élevait de ce côté.

Du côté A, au contraire, c'est bien l'eau qui s'élève par l'effet de l'attraction lunaire.

Voyons maintenant si cette attraction a pour résultat, dans les marées, un ralentissement dans la rotation des eaux de la mer.

Supposons que la terre soit entièrement couverte par les eaux, que, tournant régulièrement sur elle-même, elle commence à recevoir l'action attractive de la lune supposée immobile. Soit toujours (fig. 87) T la terre, L la lune, ABCD l'équateur terrestre. D'après la direction de la ligne des centres, les molécules d'eau placées du côté *abc*, allant suivant le sens de la flèche, c'est-à-dire se rapprochant continuellement de L, leur vitesse rotatoire, par l'attraction lunaire, sera de plus en plus accélérée jusqu'en *a*. Du côté de *adc*, au contraire, les molécules liquides, s'éloignant incessamment de L, seront retardées continuellement, mais de moins en moins à mesure qu'elles s'en éloigneront, et l'on peut supposer que jusque-là, à ce seul point de vue du moins, il y a compensation, de telle sorte que, sous ce rapport, il n'y a, en somme, en résultat, ni accélération ni ralentissement du mouvement rotatoire des eaux. Dans la note 1 que j'ai déjà citée, j'ai émis l'opinion, que le résultat était une accélération, mais je ne persiste pas dans cette solution qui, après plus mûre réflexion, ne me paraît pas fondée.

Pourquoi maintenant les principaux renflements, ceux

qui déterminent les marées, n'ont-ils pas lieu au méridien par lequel passe la ligne des centres de la lune et de la terre? Pourquoi sont-ils plus ou moins retardés et ont-ils ainsi lieu à l'est de ce méridien?

Cette sorte d'irrégularités a plusieurs causes; mais je crois qu'on peut l'expliquer généralement de la manière suivante :

Si la terre et la lune étaient immobiles, ce serait diamétralement, ce serait en *a* (fig. 87) que se trouverait le point culminant du renflement produit par l'attraction de la lune de ce côté; mais, en même temps que, par cette attraction, le renflement se forme, ses eaux, par la rotation terrestre, sont entraînées vers l'est, et, comme cet effet se reproduit continuellement et rapidement, il s'ensuit que le renflement a son sommet en un point variable *e* à l'est de *a*. Évidemment, cette explication s'applique au renflement en *e'* produit à l'est de *c* du côté opposé.

Il faut aussi considérer que les eaux ne couvrent pas tout le globe et qu'elles n'ont pas partout la même profondeur; ce qui doit plus ou moins influer sur les marées, sur les retards qu'elles éprouvent.

Si la lune opère sur les eaux à l'est de *a*, de manière à retarder leur mouvement, elle opère à l'ouest de *a* de manière à l'accélérer. Du côté opposé *c*, à partir et à l'est de ce point, jusqu'en *a*, l'action de la lune a l'effet d'accélérer plus ou moins le mouvement de toutes les molécules de la couche liquide, loin de les repousser, de retarder leur mouvement. D'abord, je le répète, à l'extrémité C, la lune, par son attraction, a rapproché d'elle la terre, elle n'a point repoussé l'eau en cette partie. Les molécules d'eau y ont conservé sen-

siblement leur vitesse rotatoire, et de plus la lune, du côté *abc*, les a attirées et a ainsi activé leur mouvement à mesure que par la rotation elles se sont rapprochées de cet astre. Il n'y a donc point lieu d'appliquer ici le couple de M. Delaunay. Au reste j'ai, à tous égards, ruiné la théorie des couples.

Toutefois, la lune, en agissant par son attraction sur le renflement *e* à l'est de *a*, peut tendre quelque peu à retarder le mouvement des eaux. Sous ce rapport, la théorie n'est pas sans fondement et peut expliquer un très-léger ralentissement dans le mouvement rotatoire de notre globe.

Dans la note 1 précitée, j'ai indiqué, comme cause de ralentissement de ce mouvement, le frottement qu'éprouvent entre elles, dans leur mouvement circulaire, les molécules de l'astre. Je pensais, d'ailleurs, que le refroidissement graduel qu'elles éprouvent en les condensant lentement, et même la résistance de l'éther ambiant, en les pressant et les condensant ainsi jusqu'à un certain point, devait diminuer peu à peu leur vitesse individuelle. Mais toute réflexion faite, je ne suis pas convaincu qu'il y ait là, en somme, des causes réelles de ralentissement. Si, d'une part, le frottement tend souvent à retarder les molécules, il y a aussi lieu de tenir compte de ce que, à mesure que les molécules se condensent, elles se rapprochent généralement du centre de la planète, et que, par suite, leur vitesse tend à s'accroître. Et d'ailleurs en se rapprochant du centre, leur vitesse angulaire pourrait augmenter ou ne pas décroître, bien que leur vitesse absolue serait diminuée.

Si primitivement une planète, au lieu d'être une sphère liquide ou gazeuse, eût été une sphère solide, et

placée d'ailleurs dans les conditions que j'ai supposées plus haut par rapport aux amas de matière S et T (fig. 86) pour expliquer l'établissement de la rotation primitive d'une planète, sans doute sa rotation n'eût pu s'établir avec une vitesse aussi grande, à beaucoup près, que celle qu'elle a prise étant liquide ou gazeuse. La très-forte cohésion, le peu de mobilité de ses parties eût été un obstacle aux mouvements tendant à se faire vers A et D, et qui, bien plus faibles, n'eussent, par leur résultante, entraîné qu'une faible rotation. Mais ici il ne s'agit pas de la manière dont la terre a pu primitivement être mise en rotation, mais bien de savoir ce qui peut maintenant influer sur la rotation qui l'anime, et je me suis trop avancé, je pense, en assurant que la condensation graduelle de la terre et le frottement de ses parties devaient, en somme, déterminer un ralentissement de son mouvement rotatoire.

Je ne crois point que la vitesse de la rotation de notre planète soit immuable. Je ne crois pas même que, dans ses fluctuations, elle revienne périodiquement à une même intensité, rigoureusement parlant. Sans doute, bien des causes tendent continuellement à la modifier, ainsi que celle des autres astres, car à part les éléments, rien n'est immuable dans l'univers, et tous ses corps influent incessamment les uns sur les autres; mais il n'est point facile de déterminer les causes et leurs effets.

Au reste, ainsi que je l'ai dit dans la même note, la cohésion peut être favorable à la rotation d'un astre. S'il n'y en avait aucune entre les molécules d'un tel corps, sa rotation n'aurait pu s'établir. Il est des cas où la rotation d'un corps implique une forte cohésion, une grande dureté, une élasticité considérable. Ainsi un

corps peut tourner par l'application de deux forces parallèles agissant en sens opposé, mais alors les molécules doivent avoir une notable cohésion entre elles. La cohésion joue un rôle capital dans la rotation que prend une bille qui, placée sur une table, se met en mouvement, roule, aussitôt que la table est inclinée, n'est plus horizontale. Alors les molécules d'un côté de la bille, perdant leur équilibre, étant entraînées par la pesanteur dans le sens de l'inclinaison, entraînent à leur tour, dans le même sens, les molécules qui les suivent; celles-ci en entraînent d'autres, et ainsi de suite. Une boule formée d'une substance molle roule moins bien sur une table que ne le fait une bille d'ivoire, d'une matière dure quelconque. C'est que : 1° le corps mou se déforme, perd sa rondeur; 2° il tend généralement à rester attaché à la table; 3° l'impulsion qu'il reçoit ne se communique pas de molécule à molécule avec autant de facilité que l'impulsion donnée à une bille d'ivoire. Il faut, dans ce cas, que le corps soit plus ou moins élastique, autrement l'impulsion n'aurait pas l'effet de lancer en avant les molécules opposées au point où est reçue l'impulsion; condition nécessaire pour que la rotation s'établisse. Si la bille d'ivoire se met si facilement et si énergiquement en rotation, cela tient à sa grande élasticité. (voir plus haut ce que j'ai dit à ce sujet dans le chapitre ayant pour objet le *mouvement curviligne.*)

Il est évident que le soleil, quelle que soit sa position, produit un effet analogue à celui de l'action lunaire sur les eaux de la mer, mais beaucoup moins considérable. Il est visible que son action étant jointe à celle de la lune, le résultat sera plus ou moins considérable selon la position relative du soleil et de notre satellite. Dans

les conjonctions ou oppositions, les marées seront plus fortès que dans les quadratures.

Il est également visible que la situation relative de la lune et du soleil influera sur la situation des sommets des renflements opérés par leur attraction. Dans les syzygies, ces sommets seront généralement plus ou moins à l'est de la lune et du soleil.

Non-seulement les attractions du soleil et de la lune agissent sur les eaux de la mer, mais elles s'exercent d'une manière analogue sur la masse générale du globe terrestre. Leurs actions sont bien faibles en ce sens sur l'écorce terrestre, à cause de sa solidité, mais elles sont plus fortes sur la masse liquide sous-jacente à l'écorce, sans être aussi considérables, toutefois, que celles qu'elles exercent sur les eaux, à cause de la très-grande mobilité de celles-ci. Remarquons aussi que, dans la matière liquide intérieure du globe, il ne doit pas se produire deux renflements opposés comme dans les eaux de la mer : il n'y a sans doute qu'un renflement principal dont la position et l'intensité sont en raison de la position relative du soleil et de la lune. Remarquons, de plus, que ces phénomènes internes doivent être plus réguliers que les phénomènes des marées, qui sont soumis à bien plus de causes de variations que ne le sont les premiers.

Les diverses considérations que je viens de présenter, infirment en plusieurs points la théorie de Laplace sur les marées, sur les fluctuations de la mer. Cette théorie néglige des éléments essentiels, et je n'accepte pas, d'ailleurs, l'application qu'il fait ici de ce principe, que *l'état d'un système de corps dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu, par les*

résistances que ce mouvement éprouve, *est périodique comme les forces qui animent ce système*. Les conditions de mouvement des molécules des eaux de la mer sont continuellement changées par les résistances, les frottements, les actions intérieures et extérieures qu'elles éprouvent. La lune et le soleil reviennent périodiquement dans des positions analogues, sensiblement pareilles par rapport au globe terrestre, à chaque lieu de ce globe; mais je ne saurais en conclure que les eaux reviennent périodiquement au même état, dans les mêmes conditions de mouvement. Je crois, au contraire, qu'il doit résulter de l'ensemble si multiple, si varié de causes, d'influences, un changement continuel, plus ou moins considérable, dans la vitesse rotatoire des eaux de la mer.

« L'observation, dit Laplace (*Mécanique céleste*, t. V), a fait connaître que les plus hautes mers n'arrivent point au moment même de la syzygie, mais *un jour et demi après*. Newton attribue ce retard au mouvement d'oscillation de la mer qui se conserverait encore quelque temps si l'action des astres venait à cesser. La théorie exacte des ondulations de la mer fait voir que, sans les circonstances accessoires, les plus hautes pleines mers coïncideraient avec la syzygie, et que les pleines mers les plus basses coïncideraient avec la quadrature. Ainsi leur retard sur les instants de ces phases ne peut être attribué à la cause que Newton lui assigne : il dépend, ainsi que l'heure de la pleine mer dans chaque port, des circonstances accessoires...

» Cependant la considération de deux ellipsoïdes superposés l'un à l'autre peut encore représenter les marées, pourvu que l'on dirige le grand axe de l'ellipsoïde

solaire vers un soleil fictif toujours également éloigné du vrai soleil. Le grand axe de l'ellipsoïde lunaire doit être pareillement dirigé vers une lune fictive toujours également éloignée de la véritable, mais à une distance telle que la jonction des deux astres fictifs n'arrive qu'un jour et demi après la syzygie.

» Cette considération de deux ellipsoïdes étendue au cas où les astres se meuvent dans des orbes inclinés à l'équateur, ne peut se concilier avec les observations. Si le port est situé à l'équateur, elle donne, vers le *maximum* des marées, les deux pleines mers du matin et du soir à très-peu près égales, quelle que soit la déclinaison des astres, seulement l'action de chaque astre est diminuée dans le rapport du carré du cosinus de sa déclinaison à l'unité. Mais si le port a une latitude, ces pleines mers pourraient être fort différentes, et quand la déclinaison des astres est égale à l'obliquité de l'écliptique, la marée du soir, à Brest, serait environ huit fois plus grande que celle du matin. Cependant les observations très-multipliées dans ce port font voir qu'alors ces deux marées y sont presque égales, et que leur plus grande différence n'est pas un trentième de leur somme. Newton attribue la petitesse de cette différence à la même cause par laquelle il avait expliqué le retard de la plus haute mer sur l'instant de la syzygie, savoir au mouvement d'oscillation de la mer qui, suivant lui, reporte une grande partie de la marée du jour sur la haute mer suivante du matin, et rend ces deux marées presque égales. Mais la théorie des ondulations de la mer fait voir encore que cette explication n'est pas exacte, et que, sans les circonstances accessoires, ces deux marées consécutives

ne seraient égales que dans le cas où la mer aurait partout la même profondeur. »

Je crois que cette opinion de Laplace n'est pas complètement fondée et qu'il y a au moins une grande part de vérité du côté de Newton. Je ne pense pas que les circonstances accessoires auxquelles le premier attribue les irrégularités dont il s'agit puissent expliquer un retard d'un jour et demi dans l'arrivée des plus hautes mers. « On peut, dit-il, assimiler ces marées à celles qui, étant dues à l'action immédiate des astres, emploieraient un jour et demi à parvenir dans le port. » Mais en réalité, suivant Laplace, comment se produisent-elles ?

Je ne nie point l'influence des circonstances accessoires sur les marées : c'est à ces causes secondaires qu'est dû le retard plus ou moins grand des marées, appelé *l'établissement du port.* Elles influent aussi sur l'intensité du phénomène. Par exemple, les eaux de la mer tournant de l'ouest à l'est, les hautes marées ne peuvent refluer directement, immédiatement, sur les eaux des côtes orientales des continents ; les marées y seront donc ordinairement moins hautes. Mais l'influence des causes accessoires n'exclut pas cette hypothèse, que les eaux d'une marée se déversent en partie sur celles de la marée qui la suit dans la direction de la rotation, quand des obstacles particuliers ne viennent pas s'y opposer. C'est principalement par l'accumulation graduelle de déversements de ce genre que dans nos ports les plus hautes marées ne viennent que longtemps, un jour et demi, après la syzygie.

Le déversement d'une marée sur une autre est sans

doute bien faible, et généralement même presque nul, mais il est concevable que, par cette cause, les plus fortes marées se produisent ordinairement un jour et demi après l'époque de la syzygie, conformément aux observations.

L'on ne serait pas fondé à prétendre que, si cela était, l'équilibre des eaux serait bien plus troublé qu'il ne l'est : l'on ne saurait vraiment prouver une telle assertion. Tout considéré, il est supposable que, par toutes les causes qui opèrent dans ces phénomènes, par l'influence des circonstances accessoires, et bien que généralement les eaux d'une marée tendent à se déverser plus ou moins sur la suivante, il ne se produise pas dans l'équilibre des eaux des perturbations plus considérables que celles qu'on observe.

Je n'accepte que sous réserve cette conclusion de Laplace, que l'équilibre de la mer est stable si sa densité est moindre que la densité moyenne de la terre. L'équilibre, une fois troublé jusqu'à un certain point, tendrait moins à se rétablir, son écart serait plus persistant, si le liquide était plus dense qu'il ne l'est, mais aussi il faut considérer que si le liquide était plus dense, ses molécules, étant sans doute alors moins mobiles, auraient moins obéi aux attractions de la lune et du soleil, et que, par suite, le trouble, l'écart apporté à leur équilibre eût été moins considérable.

Je ne veux pas terminer ce chapitre sans parler des observations récentes faites sur le soleil, principalement pendant la dernière éclipse, et sans examiner si les résultats de ces observations sont de nature à modifier les appréciations et les idées que j'ai précédemment exprimées au sujet de la constitution de cet astre.

Dans son rapport sur cette éclipse, M. Janssen, astronome français, constate qu'il a observé deux magnifiques protubérances qui brillaient à droite et à gauche de la ligne des contacts, où venaient s'éteindre les derniers rayons solaires. L'une d'elles surtout, celle de gauche, était d'une hauteur de plus de trois minutes ; elle rappelait la flamme d'un feu de forge sortant avec force des ouvertures du combustible, poussée par la violence du vent. Le spectroscope appliqué à ces protubérances a donné deux spectres formé de cinq ou six lignes très-brillantes, rouge, jaune, verte, bleue, violette. Ces spectres, hauts d'environ une minute, se correspondaient raie pour raie ; ils étaient séparés par un espace obscur où l'on ne distinguait aucune raie brillante.

M. Janssen conclut de ces observations, que les protubérances sont gazeuses, que leur composition chimique est la même et qu'elles sont principalement formées d'ydrogène ; les raies rouges et bleues de leur spectre n'étant autres que les raies C et F du spectre solaire caractérisant le gaz hydrogène.

Pendant l'obscurité totale, les raies protubérantielles brillaient d'un vif éclat ; de là vint à M. Janssen la pensée qu'on pourrait les voir en dehors des éclipses, ce qu'il a vérifié depuis.

Pour cela, il plaça la fente du spectroscope sur le bord du disque où la veille il avait observé les protubérances lumineuses. Cette fente placée en partie sur le disque solaire et en partie en dehors donnait deux spectres : celui du soleil et celui de la région protubérantielle. L'éclat du spectre solaire étant un obstacle, cet observateur masqua dans ce spectre le jaune, le vert et le bleu, les portions les plus brillantes. Toute

son attention était dirigée sur la ligne C, obscure pour le soleil, brillante pour la protubérance. Tout à coup, sur la région protubérantielle du bord occidental, il aperçut une petite raie rouge brillante de une à deux minutes de hauteur, formant le prolongement rigoureux de la raie obscure C du spectre solaire. En faisant mouvoir la fente du spectroscope, cette ligne persistait, mais elle se modifiait dans sa longueur et dans l'éclat de ses diverses parties, accusant ainsi une grande variabilité dans la hauteur et dans le pouvoir lumineux des diverses régions de la protubérance. Peu après, il constata que la raie brillante F se montrait en même temps que C.

Dans l'après-midi, les lignes brillantes s'y montrèrent de nouveau, mais elles accusaient de grands changements dans la distribution de la matière protubérantielle ; les lignes se fractionnaient quelquefois en tronçons isolés, qui ne se réunissaient pas à la ligne principale, malgré les déplacements de la fente d'exploration. Ce fait indiquait l'existence de nuages isolés qui s'étaient formés le matin....

Le 4 septembre, à 9 h. 50 m., l'exploration du soleil indiquait un amas de matière protubérantielle dans la partie intérieure du disque. Une protubérance s'étendant sur une longueur de 30°, dont 10 à l'orient du diamètre vertical et 20 à l'occident. Vers l'extrémité de la portion occidentale, un nuage considérable s'élevait à 1′ 1/2 du globe solaire. Ce nuage, long de plus de 2′, large de 1′, s'étendait parallèlement au limbe. Une heure après (10 h. 50 m.), un nouveau tracé montra que le nuage s'était élevé rapidement, prenant la forme globulaire. Mais les mouvements devinrent bien plus rapides

encore ; car, dix minutes après, c'est-à-dire à 11 h., le globe s'était énormément allongé dans le sens normal au limbe solaire, ou perpendiculaire à la première direction. Un petit amas de matière s'en était détaché à la partie inférieure et se trouvait *suspendu entre le soleil et le nuage principal*..

En résumé, la lumière photosphérique émanée de particules solides ou liquides incandescentes, est incomparablement plus puissante que celles des protubérances due à un rayonnement gazeux. Les raies lumineuses des protubérances correspondent à des raies obscures du spectre solaire.

1° Les protubérances lumineuses, observées pendant les éclipses totales, appartiennent incontestablement aux régions circomsolaires ;

2° Ces corps sont formés d'hydrogène incandescent ; ce gaz y prédomine s'il n'en forme la composition exclusive ;

3° Ces corps circomsolaires sont le siége de mouvements dont aucun phénomène terrestre ne peut donner une idée, des amas de matière dont le volume est plusieurs centaines de fois plus grand que celui de la terre, se déplaçant et changeant complétement de forme dans l'espace de quelques minutes.

M. Stéphane, directeur de l'expédition française, a aussi rendu compte de ses observations. Il constate que les protubérances apparaissaient avec une merveilleuse netteté. Il y en avait, dit-il, quatre groupes. Leur couleur était celle d'un corail rose, légèrement teinté de violet ; une d'elles n'avait pas une longueur moindre que la dixième partie du diamètre lunaire ; deux autres, presque diamétralement opposées, étaient dentelées ; la dernière était un large groupe d'aspect floconneux.

Les spectres des protubérances lui ont aussi offert des raies brillantes. Les rayons, qu'on désigne sous le nom de *gloires*, semblent correspondre, par leur position, aux protubérances.

M. Rayet, qui a aussi observé l'éclipse du 18 août, rapporte que le spectre des protubérances présentait une série de neuf lignes brillantes, qui, d'après leur disposition dans le champ, leur espace relatif, leurs couleurs, et enfin par la physionomie de leur ensemble, lui ont paru devoir être assimilées aux lignes principales du spectre solaire, B, C, D, E, *b*, une ligne inconnue, F, et deux lignes du groupe G. Ces lignes avaient un très-vif éclat et se détachaient vivement sur un fond gris cendré très-pâle. Les protubérances, conclut-il, sont donc des jets d'une matière gazeuse incandescente.

La lumière de la couronne était très-faible par rapport à celle des protubérances ; elle ne donnait aucun spectre coloré sensible.

Toutes les protubérances ne lui ont point paru émettre une lumière identique.

Le même a fait des observations très-précises sur la réfrangibilité de la raie jaune qu'il a remarquée dans le spectre des protubérances. Cette ligne se voit, dit-il, sur tout le pourtour du disque solaire aussi facilement que les trois lignes de l'hydrogène, et il en conclut que le gaz incandescent auquel elle correspond est, au même titre que l'hydrogène, un des éléments constitutifs de l'atmosphère solaire.

M. Lockyer, qui, de son côté, à peu près en même temps que M. Janssen, découvrait le moyen d'observer le spectre des protubérances en dehors des éclipses, a fait à la Société royale de Londres la communication suivante :

I. Sous certaines conditions, les raies C et F se montrent sur le soleil brillant, et aussi sur le spectre des taches, comme sur les protubérances de la chromosphère. — II. Sous certaines conditions, et quoiqu'elles n'aient pas été observées à l'état de raies brillantes, les raies correspondantes de Fraunhofer sont effacées. — III. Les changements de réfrangibilité, que subissent en même temps ces raies, montrent que *la matière absorbante se meut de bas en haut et de haut en bas relativement à la matière rayonnante*, et ces mouvements peuvent être déterminés avec une très-grande exactitude. — IV. Les raies brillantes, observables dans le spectre ordinaire, sont souvent interrompues par le spectre des taches, *c'est-à-dire qu'elles ne sont visibles que dans les parties du spectre solaire en avant ou en arrière des taches*. — V. Les raies C. et F varient excessivement d'épaisseur sur ou près d'une tache, et le 11 avril, dans les portions plus profondes des taches, elles étaient beaucoup plus épaisses qu'à l'ordinaire.

M. Varren de la Rue, en produisant des photographies de la même éclipse, exprime l'opinion que les protubérances se rattachent d'une manière bien plus étroite aux facules qu'aux taches ; car, dit-il, nous savons avec certitude maintenant qu'elles proviennent (les protubérances) d'éruptions de gaz chauds, et nous avons établi, au contraire, que les taches se rattachent intimement à un affaissement de matière gazeuse comparativement froide.

Il fait remarquer que, dans l'éclipse du 18 août, l'une des cornes, la plus grande, était en forme de spirale.

Suivant des observations du R. P. Secchi, le soleil se trouve à une époque de taches très-nombreuses ; dans la

matinée du 7 mai 1869, on en comptait 33 principales disposées en 7 ou 8 groupes. Leur nombre marche donc rapidement vers un maximum. Le minimum a eu lieu dans les premiers jours de 1867. Il se trouve que, jusqu'à présent, ces variations sont soumises à une période triennale d'une manière très-approchée. La nouvelle série de taches depuis le minimum a recommencé cette fois comme elle l'avait fait d'autres fois à des latitudes plus élevées que celles où avait fini la précédente. Le spectre, dans l'intérieur des taches, éprouve une grande altération. « Beaucoup de ses raies les plus noires, dit-il, s'élargissent, d'autres deviennent enfumées, quelques-unes, ordinairement peu visibles, deviennent très-fortes. Quant aux raies brillantes, quelques-unes conservent entièrement leur vivacité, d'autres diminuent notablement. Les raies qui s'élargissent le plus sont celles qui dérivent de la présence du calcium et du fer; celles du chrome et du cobalt sont aussi modifiées, mais moins; celles du calcium se dilatent plus que toutes les autres; » celles du magnésium ne s'élargissent que très-peu. Celles du sodium deviennent nuageuses sur les bords, comme celles de beaucoup d'autres qui *proviennent de substances inconnues*. Mais le fait le plus important est que beaucoup de séries de raies très-fines, équidistantes, *à peine visibles dans les circonstances ordinaires*, *deviennent très-obscures*, et d'une telle forme qu'elles arrivent au degré des raies noires des métaux; et elles sont nébuleuses sur leurs bords. Il est difficile de dire si parmi celles-ci il y en a réellement quelques-unes qui soient absolument nouvelles, parce que la détermination de leur existence dépend de la force des instruments; mais leur seul renforcement est déjà extraor-

dinaire, est déjà un fait qui prouve une énergie augmentée notablement dans l'intérieur des taches et dans la cause qui les produit.

« Ensuite, certaines raies brillantes demeurent intactes au point de paraître même plus brillantes qu'elles ne l'étaient auparavant. Elles donnent ainsi une preuve que si d'autres raies s'effacent, s'assombrissent, cet effet n'est pas dû à une absorption générale, mais à une absorption élective et spéciale des substances et des vapeurs qui existent dans le soleil. Pour produire de pareils effets, ces vapeurs *doivent être plus denses et plus compactes au fond des taches, et, par conséquent, absorber davantage; et ainsi leurs raies doivent s'élargir et devenir plus noires.* L'aspect enfumé ou la nébulosité de certaines raies indique qu'il existe à leur limite d'autres substances qui, étant insensibles sur le reste du disque, se révèlent sur les profondeurs plus considérables. Ceci est confirmé par le fait que, sur le bord du disque, ces raies brillantes restent très-brillantes, à ce point que quelques personnes les ont regardées comme des raies nouvelles; et cela parce qu'alors elles échappent à toute absorption, tandis que beaucoup d'autres qui sont fines deviennent plus fortes.

» Mais les raies de l'hydrogène font tout le contraire de ces modifications d'absorption plus grande et de renforcement des raies. Au lieu de devenir plus foncées, *les raies de l'hydrogène s'affaiblissent et disparaissent tout à fait, et même elles sont interverties en devenant lumineuses.* Nous avons déjà dit, dans un autre article, que c'était l'hydrogène qui formait les protubérances et les nuages rosés que l'on voit autour du soleil dans les éclipses totales; maintenant nous pouvons ajouter que

ce même gaz existe en très-grande abondance dans les taches et aux environs. Il est surtout très-élevé et très-abondant dans ces langues plus brillantes qui forment les *ponts* à travers les taches et les *facules* qui les environnent. L'interversion des raies de l'hydrogène devenant lumineuses, de noires qu'elles étaient, en est une preuve de fait directe et irrécusable.

» Les grands changements du spectre solaire décrits jusqu'ici portaient naturellement à le comparer à celui des autres corps célestes. Nous avons fait cette comparaison, et nous avons trouvé que le spectre dans l'intérieur des taches ressemble à celui des étoiles rouges, qui contient beaucoup de zones et de stries obscures comme α d'Orion, Antarès, Aldébaran, *o* de la Baleine, etc. La conclusion directe qui se tire de cette comparaison est que ces étoiles doivent leur couleur à la même cause qui produit les taches dans le soleil, et qu'elles doivent y être plus nombreuses que dans notre soleil. Toutes ces étoiles sont variables, et leur variabilité doit dépendre des taches. Mais notre soleil aussi est variable, et la période des taches indiquée ci-dessus est certainement accompagnée d'une variation périodique d'éclat, quoique nous n'ayons pas encore de moyens certains pour l'évaluer quantitativement.

» Nous avons dit qu'en outre des raies principales, un grand nombre d'autres raies habituellement très-faibles devenaient très-fortes dans l'intérieur des taches. Maintenant, ces raies généralement nébuleuses, parallèles et équidistantes, nous offraient une grande analogie avec celles qu'on observe dans le soleil lorsqu'il est à l'horizon, et qui sont dues à l'absorption produite par notre atmosphère. Il était donc intéressant de comparer

les deux qualités de raies. C'est ce que nous avons fait, et nous avons trouvé que beaucoup de groupes qui se forment dans les taches sont identiques à ceux qui sont produits par l'action de notre atmosphère, *mais non tous.* Ici encore, la raie C échappe à toute absorption et devient brillante dans les taches, comme lorsque le soleil est haut, tandis qu'une forte raie voisine nommée C', laquelle provient aussi de notre atmosphère, demeure sans altération dans les noyaux....

» La conclusion fondamentale qui se déduit de ces recherches est que les taches solaires sont des cavités remplies de vapeurs métalliques denses qui forment l'atmosphère solaire; et comme la qualité de ces substances est la même au fond de la masse générale de l'atmosphère plus subtile qui se trouve au-dessus du niveau de ces cavités, on voit par là que la différence est due seulement à sa plus grande épaisseur. En effet, les phénomènes décrits ci-dessus sont plus sensibles dans les taches qui sont plus profondes, comme on le reconnaît à d'autres indices. Ainsi se trouve confirmée la théorie que nous avons exposée plusieurs fois dans d'autres circonstances, et d'après laquelle la photosphère plus brillante est formée de matière tenue en suspension dans l'atmosphère solaire gazeuse, à l'état de précipité solide ou liquide, comme la vapeur d'eau reste suspendue dans l'air chez nous. Et comme toute vapeur doit produire des couches diverses de ces nuages à différentes hauteurs, ainsi on peut s'expliquer les différences d'intensité lumineuse que l'on observe dans les différentes régions des taches et de leurs noyaux.... » (*Giornale di Roma*, 11 mai 1869.)

Précédemment, le 19 avril 1869, le P. Secchi avait

fait une communication sur le même sujet, où il disait notamment ceci : « Les raies brillantes se voient sur tous les points du bord du disque solaire, mais elles n'ont pas toutes la même longueur ou hauteur. Leur hauteur commune est de 10 à 15 secondes, et sur quelques points, elles s'élèvent énormément, atteignant une minute et plus. Ce sont précisément les lieux des protubérances ; et souvent alors on voit des fragments de raies brillantes, détachées et suspendues dans l'atmosphère, dessiner des nuages solaires superposés à distance. Cette constance des raies au bord du disque montre que la couche d'hydrogène mêlée à la substance jaune recouvre le globe solaire tout entier, et que les protubérances sont des accidents locaux. La couche entière a, par conséquent, une épaisseur moyenne égale aux quatre cinquièmes du diamètre de la terre, c'est-à-dire une hauteur de plus de 5,000 kilomètres. *Les points les plus élevés se trouvent toujours près des taches et des facules...* » Si l'on place la fente du spectroscope parallèlement au bord du disque, on observe ces phénomènes importants : 1° la couche d'hydrogène montre ainsi les raies brillantes avec une grande facilité, mais on constate dans ce cas que la raie F n'est pas toute de l'hydrogène, puisqu'elle est lumineuse sur la moitié située du côté du rouge et noire sur la moitié située du côté du violet; 2° la couche d'hydrogène est souvent séparée du reste du disque, puisque le spectre du disque n'apparaît qu'autant que les raies brillantes ont disparu ; 3° entre la couche d'hydrogène et le bord du disque proprement dit, il existe un espace qui donne un spectre continu ou sans raies sensibles. Cette couche est très-subtile et difficile à voir; on ne la voit plus, si l'air n'est pas parfaitement

calme, parce que le moindre mélange de lumière la fait disparaître. Cette couche à spectre homogène formerait la base de l'atmosphère solaire.....

» C'est un fait important que sur aucun noyau de taches le spectre n'est réellement interrompu; il conserve toujours sa lumière, et prend seulement un aspect plus enfumé, par le rétrécissement des espaces brillants, l'élargissement des raies noires et la formation d'une infinité de lignes nébuleuses.

» Beaucoup de ces lignes nébuleuses coïncident avec celles qui se forment quand le soleil est à l'horizon... Une partie de celles situées dans la zone rouge orangé, sont identiques à celles qui se produisent toutes les fois qu'un cirrus passe devant l'objectif de la lunette. Il en résulte que ces raies sont celles de la vapeur d'eau.....

» Les lignes de lumière vive qui forment la division des noyaux, sont évidemment soulevées au-dessus de ces noyaux en manière d'arches ou de ponts. Ces ponts, en effet, montrent le spectre de la photosphère avec la raie C en partie lumineuse.... »

Suivant M. Rziha, les lignes obscures du spectre solaire, pendant l'éclipse du 18 août, restèrent parfaitement distinctes jusqu'au commencement de la totalité, où elles disparurent ne laissant plus qu'un spectre terne, bien que toujours perceptible et continu. Un renversement du spectre, c'est-à-dire une apparition de lignes lumineuses aux places qu'occupaient les lignes obscures n'a pas eu lieu.

M. Janssen assure que, d'après ses observations spectrales, l'atmosphère solaire est basse, à niveau fort inégal et tourmenté. Souvent elle ne dépasse pas les saillies de la photosphère, mais, phénomène bien remar-

quable, elle forme, dit-il, un tout continu avec les protubérances, dont la composition générale est la même et qui paraissent en être simplement des portions soulevées, projetées et souvent détachées en nuages isolés....

M. Janssen maintient que les raies de l'hydrogène sont visibles dans toute l'atmosphère solaire et que les protubérances en sont les portions les plus élevées.

A l'académie des sciences, on rappelle que, en 1841, M. Angelot, dans un travail sur les météorites, disait que l'hydrogène doit jouer un très-grand rôle dans l'économie du soleil et que même la lumière et la chaleur de cet astre sont dues à la décomposition et recomposition successives de l'eau, et à ce sujet M. Elie de Beaumont émet l'opinion que les découvertes de M. Janssen sont une sorte de sanction donnée aux aperçus de M. Angelot.

M. Faye dit alors qu'il ne croit pas que cette manière de voir puisse être adoptée sans contestation ; car, selon lui, c'est un fait parfaitement acquis que la lumière n'est pas due à la combustion d'un corps gazeux, mais à celle de corps solides dont la lumière est modifiée par l'*interposition d'une masse aériforme*.

Selon M. Ch. Darville, il n'y aurait pas antagonisme entre les deux théories, pourvu qu'on ne laissât à l'hydrogène que le simple rôle de réfléchir la lumière émanant de ces corps solides en combustion. — Ceci, dit M. Dumas, serait conforme aux idées de M. Janssen, qui n'a jamais dit qu'il y a dans le soleil de l'hydrogène en combustion, mais seulement de l'hydrogène *incandescent*.

M. Janssen, on l'a vu, admet entre les taches solaires et les protubérances une relation intime. Le P. Secchi

était, de son côté, arrivé à la même découverte. Ce dernier croit en outre avoir découvert des traces de vapeurs d'eau dans le soleil et surtout dans le voisinage des taches... Il annonce aussi que, dans des observations spectrales d'un groupe de taches solaires prêt à disparaître en franchissant le bord de l'astre, il a retrouvé *toutes les raies brillantes des protubérances signalées d'abord par M. Rayet. Elles se sont montrées au-dessus d'une facule.*

M. Janssen écrit que la raie D du spectre des protubérances solaires n'est pas la double raie du sodium : elle est située un peu plus loin du côté du vert.

Postérieurement, M. Rayet signale une sixième raie brillante dans le spectre des protubérances : de ces six raies, quatre appartiennent à l'hydrogène; les autres indiquent la présence de corps différents.

Presque en même temps, le P. Secchi envoie une note qui se résume ainsi : Les deux raies *b* ne sont par celles du magnesium; il y a dans l'atmosphère solaire des substances qui brillent d'une lumière directe et donnent des raies brillantes, grâce aux conditions nouvelles sous lesquelles elles passent dans l'enveloppe extérieure du soleil; ces raies n'appartiennent pas à l'hydrogène; loin d'être formée seulement d'hydrogène, *l'atmosphère solaire est une atmosphère très-composée, dans laquelle nagent les nuages des protubérances; toutes les protubérances ne sont pas homogènes.*

J'ai, je pense, reproduit ce qu'il y a de plus essentiel dans les nombreuses observations récemment faites sur le soleil, principalement pendant et depuis l'éclipse du 18 août, et dans les appréciations diverses auxquelles elles ont donné lieu.

De l'ensemble des observations que j'ai résumées, il paraît résulter que l'hydrogène joue un rôle important dans le soleil, que ce corps existe à l'état de gaz, notamment dans les protubérances et dans l'atmosphère solaire; mais il ne paraît point que ce même gaz constitue à lui seul les protubérances, ni même l'atmosphère solaire; car, d'après les observations spectrales dirigées sur ces masses, outre les raies attribuées au spectre de l'hydrogène, on voit d'autres raies, ce qui est bien reconnu, généralement du moins.

Je ne. crois point, d'ailleurs, qu'il résulte de ces observations la démonstration que plusieurs y voient, que l'atmosphère solaire serait très-peu étendue, et que les protubérances en seraient les parties les plus élevées. Par toutes les considérations que j'ai émises à ce sujet dans mon livre sur le soleil, considérations qui, selon moi, conservent leur importance, je persiste à penser que cette atmosphère est sans doute d'une très-faible densité, dans sa généralité, mais qu'elle est très-étendue, qu'elle s'étend bien au delà de la couronne.

M. Faye qui, comme on sait, a eu beaucoup de peine à accorder au soleil une atmosphère quelconque, assure que son atmosphère ne peut avoir plus de trois minutes de hauteur. Il fonde cette assertion sur ce que la comète de 1843 passa à 3′ du soleil. Il regarde comme certain que si, à cette distance de l'astre, il eût existé une atmosphère, la comète s'y serait incorporée et aurait disparu ; ce qui n'a pas eu lieu.

Eh bien ! cette considération de l'éminent astronome pour restreindre ainsi l'étendue de l'atmosphère solaire ne me semble pas concluante. D'adord, est-il bien certain que la comète de 1843 se soit approchée autant du

soleil? Il me semble que cela peut être mis en doute, si l'on considère le désaccord qui s'est souvent produit entre les spéculations astrononiiques, notamment en ce qui a concerné la marche et même l'identité des comètes. Mais admettons que celle si brillante et si énorme de 1843 ait vraiment passé à 3′ du soleil, et il paraît bien qu'elle s'en est très-rapprochée. Pourra-t-on en conclure avec certitude que la présence d'une atmosphère solaire eût dû nécessairement avoir pour effet de l'arrêter dans son cours et de la confondre avec cette atmosphère? — Je ne le crois pas. Il me paraît que la vitesse de la comète pouvait être assez intense pour vaincre cette résistance, qui, d'ailleurs, était minime; si la partie de l'atmosphère traversée était extrêmement peu dense. On peut bien penser que le noyau cométaire était plus dense que la portion atmosphérique où il a passé. Quant à la queue, si elle était de même densité que le milieu qu'elle a traversé, sa vitesse n'a-t-elle pu encore suffire pour la maintenir, sinon dans sa totalité, du moins dans sa plus grande partie? Il est vrai que le corps solaire, à une si petite distance, devait attirer bien puissamment la comète; mais cette énorme attraction n'ayant pas déterminé sa chute, n'ayant pas arrêté son cours, il est supposable qu'elle ait continué sa marche malgré la résistance d'une atmosphère extrêmement ténue. Que la comète ait laissé une portion de sa queue dans l'atmosphère solaire, c'est possible; mais tout considéré, je le répète, le fait invoqué par M. Faye ne saurait prouver que le soleil n'a pas une atmosphère fort étendue, mais d'une densité très-minime à une certaine distance de l'astre.

D'après une lettre du P. Secchi, insérée dans *les Mondes* du 20 janvier 1870, l'atmosphère solaire est au

contraire d'une très-grande étendue. Selon lui, elle s'élèverait de 6 à 7 minutes, et cela ne devrait pas étonner, « car, dit-il, il y a des protubérances qui ont quelquefois au moins trois minutes, et, au-dessus de celles-ci des couches d'hydrogène encore plus élevées. Au-dessus de ces proéminences, qui, vues directement, donneraient une raie lumineuse, il y a une couche qui absorbe leurs rayons et produit une raie obscure. La limite des raies brillantes dans les proéminences rouges n'est pas, et ne peut pas être la limite de l'atmosphère d'hydrogène ou du mélange d'hydrogène et d'autres gaz, mais seulement la limite de la région à laquelle l'hydrogène a la température voulue pour produire ces raies : lorsqu'il est à une température plus basse, l'effet est contraire, et l'on a une absorption. »

De plus, je ne trouve pas plausible d'admettre que les protubérances ne sont que des parties de l'atmosphère même de l'astre. Il me paraît, à tous égards, bien plus vraisemblable et admissible que ces masses gazeuses sont seulement en suspension dans cette atmosphère, à peu près comme nos nuages dans l'atmosphère terrestre. Qu'il y ait dans toutes les parties de l'atmosphere une certaine quantité des mêmes gaz constitutifs des protubérances, cela est bien admissible, et en cela il y aurait analogie entre l'atmosphère solaire et la nôtre qui, comme on sait, contient partout, généralement du moins, de la vapeur d'eau et d'autres vapeurs ou gaz différents de ce qui la constitue essentiellement elle-même. Mais les protubérances paraissent se détacher parfois de la photosphère, rester assez longtemps suspendues à des distances notables du soleil, et je ne pense pas qu'on puisse bien l'expliquer sans supposer que ces masses se sont

élevées ainsi dans un milieu gazeux ou gazéiforme qui en diffère plus ou moins par sa composition même, par sa densité, son degré d'élasticité, de tension. La vapeur d'eau que plusieurs observateurs ont constatée dans l'atmosphère solaire offrirait un point d'analogie entre cette atmosphère et la nôtre, et sans doute les gaz qui constituent les masses nuageuses protubérantielles ne sont pas plus que la vapeur d'eau, les éléments essentiels, réels de l'atmosphère solaire proprement dite.

J'ajoute que les protubérances parfois, de même que les facules photosphériques, présentent la forme de spirale, ce qui s'explique par des phénomènes atmosphériques, par une action de l'atmosphère solaire sur les gaz qui s'y trouvent et constituent la photosphère et les protubérances elles-mêmes. Or ceci implique que l'atmosphère n'est pas identique aux gaz sur lesquels elle exerce son action.

Dans les écrits déjà cités, j'ai dit comment je conçois la formation de tourbillons atmosphériques qui produiraient l'effet dont il s'agit (1).

Dans ces mêmes écrits, j'ai montré que l'on ne sau-

(1) Depuis que j'ai écrit ces lignes, j'ai vu dans *les Mondes* que, dans une communication de M. Zoellner à l'Académie des sciences, au sujet de ses expériences spectrales, ce savant conclut de ses nombreuses observations et dessins, que les protubérances ne sont pas des nuages flottants dans l'atmosphère, mais bien des émissions, des éruptions de matière gazeuse lancées dans le vide ou dans un milieu plus léger, et retombant sur le soleil. — Sous divers rapports cette opinion s'accorde avec la mienne, notamment en ce qui concerne la forme de spirale qu'affectent parfois les protubérances. Toutefois je maintiens que, d'après de précédentes observations, des protubérances sont restées longtemps suspendues au-dessus de l'astre, à de grandes distances, ce qui me fait penser que M. Zoellner généralise trop en décidant que les matières protubérantielles ne peuvent flotter dans l'atmosphère solaire, qu'elles retombent sur l'astre aussitôt que la force d'éruption ou d'émission qui les a élevées se trouve anéantie.

rait convenablement expliquer les phénomènes relatifs aux taches solaires, aux noyaux, aux pénombres et facules, sans supposer autour du corps principal du soleil deux couches ou enveloppes gazeuses ou gazéiformes, dont l'une est lumineuse par elle-même, et l'autre placée au-dessous de celle-ci est opaque et réfléchissante, et sans admettre que la partie la plus sombre de la tache, dite *noyau*, est le corps solaire aperçu par les ouvertures des deux enveloppes, à travers l'atmosphère dans laquelle se trouvent suspendues ces mêmes enveloppes qui ne sont point continues, sont formées chacune de masses plus ou moins distantes les unes des autres, comme le montrent les nombreux *pores* qu'on aperçoit sur le soleil.

Or, dans les nouvelles observations que j'ai résumées, il n'y a rien qui soit de nature à modifier l'opinion que j'exprimais alors sur la constitution du soleil. Elles tendent bien plutôt à confirmer cette manière de voir, car elles ne se concilient pas avec les théories qui s'en écartent essentiellement, non-seulement avec la théorie de M. Kirchhoff, mais encore avec celle de M. Faye.

Celle-ci, elle-même, me paraît en désaccord avec les observations spectrales faites à l'occasion de la dernière éclipse. En effet, d'après M. Faye, le fond sombre d'une tache solaire résultant de ce que la matière gazeuse du soleil serait, à cette profondeur, en complète dissociation et ne contiendrait pas de parties solides ou liquides incandescentes, à la différence de la photosphère, où des matières de cette nature, dans cet état, produiraient le vif éclat qu'on y observe, le spectre du fond des taches devrait n'offrir que des raies brillantes, et différer en cela du spectre que donne la photosphère. Or, nous

avons vu qu'il n'en est pas ainsi, nous avons vu que, suivant M. Huggens notamment, le spectre, sous ce rapport, apparaît, dans la tache, comme identique à celui que donne la photosphère, et que généralement les observations s'accordent avec celles de M. Huggens sur ce point.

M. Prazmowski, partisan de la théorie de M. Faye, a tâché de refuter cette objection tirée de ce désaccord entre elle et les observations spectrales. A ses yeux, la contradiction n'est qu'apparente: « En effet, dit-il, si le fond de la tache n'était qu'un gaz incandescent dont les radiations arriveraient jusqu'à notre œil sans interposition d'une atmosphère absorbante, elles devraient nous apparaître au spectroscope comme une suite de raies brillantes, mais il n'en est pas ainsi, ces radiations nous arrivent après avoir subi dans l'atmosphère solaire une absorption puissante. La composition de cette atmosphère est presque identique à la masse intérieure du soleil. La différence ne peut consister que dans la proportion des éléments dont le mélange constitue la masse centrale. Mais il est à présumer que tous ces éléments du soleil se retrouvent dans son atmosphère. Par le principe de proportionnalité entre le pouvoir absorbant et le pouvoir émissif, la majeure partie des radiations du corps central, qui produiraient des raies brillantes, sera éteinte par l'atmosphère solaire composée à peu près des mêmes éléments. Dans cette supposition, la tache analysée au spectroscope ne peut produire aucune apparence de raies, ou tout au plus des raies très-faibles, dues aux radiations qui échappent à l'absorption.

« C'est le contraire qui a lieu. M. Huggens a vu la

tache donner un spectre du même caractère que celui de la photosphère, et son observation *s'explique très-bien* dans l'hypothèse de M. Faye. En effet, on ne peut pas raisonnablement admettre que la tache, dans toute son étendue, soit complétement dépourvue d'une petite quantité de matière solidifiée.

» L'atmosphère terrestre, relativement si calme, si peu tourmentée, même pendant les jours sereins, est toujours un peu trouble, un peu brumeuse. La puissance des courants dans l'atmosphère solaire est bien autrement grande. Le mélange des courants ascendants et des courants descendants, ne peut se faire sans donner naissance à des condensations partielles.

» Une très-petite quantité de matière solide incandescente répandue sur la surface de la tache, *peut parfaitement* renverser ces apparences en éteignant le peu des radiations échappées à l'absorption de l'atmosphère solaire, en faisant apparaître le spectre observé par M. Huggens... »

Pour moi, je n'accepte pas cette réfutation. Étant admis qu'un gaz incandescent doit donner un spectre à raies brillantes et que ces raies doivent être remplacées par des raies noires, sombres, lorsqu'à ce gaz se joignent des parties solides ou liquides ; d'un autre côté, étant admis aussi que le vif éclat du gaz provient alors de ces mêmes matières solides ou liquides qui s'y trouvent à l'état d'incandescence, il faut bien, dans l'hypothèse de M. Faye, supposer que, dans le fond des taches, et même au-dessus, il y a fort peu de particules solides ou liquides mêlées aux gaz qui peuvent s'y trouver, et, conséquemment, on devrait apercevoir généralement dans les spectres donnés par ces gaz les raies brillantes qui

les caractérisent. Les spectres de ces gaz ne devraient pas être renversés par cela seul qu'il s'y joindrait quelques particules solides ou liquides. Nous avons vu que, suivant plusieurs observateurs, les protubérances paraissent être émanées de la photosphère. Il est présumable, d'après cela, qu'elles contiennent bien quelques parcelles solides ou liquides venues de la photosphère, où les substances de cette nature abondent, et cependant les raies des spectres fournis par les protubérances se montrent brillantes, parce que les particules solides ou liquides qui peuvent s'y trouver ne sont pas assez nombreuses, à beaucoup près, pour produire le renversement spectral dont il s'agit.

Il faut donc convenir que, sous ce rapport encore, la théorie de M. Faye n'est point satisfaisante.

Les spectres que donne l'intérieur des taches, particulièrement dans la portion plus noire qu'on appelle le noyau, viendraient au contraire corroborer l'hypothèse qui me paraît d'ailleurs la plus plausible, savoir que le globe solaire serait une masse liquide, plus ou moins solidifiée à sa surface, et que les taches seraient généralement déterminées par des éruptions volcaniques qui lanceraient vers la région photosphérique des particules solides, liquides et gazeuses, devant contribuer à l'alimentation de la photosphère, à la production de cette éblouissante clarté, de cette énorme radiation lumineuse et calorifique qu'elle projette dans l'espace.

Les langues brillantes qui forment comme des ponts à travers les taches, et les facules qui les environnent, offrent le spectre de l'hydrogène, et là les raies du spectre sont brillantes, mais ces masses ne se trouvent pas à une grande profondeur, et étant gazeuses, conte-

nant peu ou point de matières solides ou liquides incandescentes, elles donnent un spectre analogue à celui des protubérances. Au fond des taches, dans la partie qui paraît noire, celle du noyau, les raies de l'hydrogène s'affaiblissent, disparaissent même tout à fait. Les raies brillantes de l'hydrogène qu'on aperçoit parfois dans les taches sont rares et très-étroites, ce qu'on peut d'ailleurs expliquer, dans mon hypothèse où la chaleur serait moindre dans ces profondeurs que dans les régions photosphériques. Il paraît, en effet, que plus est grande la chaleur à laquelle l'hydrogène est soumise, plus les raies de ce gaz sont larges : c'est du moins ce qui résulte des observations du P. Secchi, qui, dans une lettre précitée, écrit : « L'élévation de température donne à l'hydrogène la propriété de présenter, dans son spectre, des raies plus larges. »

Il est donc plausible que, dans les taches solaires, se trouvent des matières solides ou liquides en très-grande quantité, contrairement à la théorie de M. Faye qui n'accorde à l'intérieur des taches, au fond de leurs cavités, qu'une matière gazeuse, maintenue en dissolution complète par l'excessive chaleur qui y régnerait.

La chaleur du soleil est-elle due uniquement et même principalement à la décomposition et recomposition successive de l'eau? — Je ne le crois pas. Il y a sans doute d'autres gaz que l'hydrogène en combustion, et je pense d'ailleurs que la radiation solaire est due surtout à des corpuscules métalliques incandescents.

Les deux enveloppes principales que j'admets doivent différer essentiellement dans leur constitution. Si l'une et l'autre contiennent de l'hydrogène, elles doi-

vent différer par une ou plusieurs autres substances que l'une contient et qui manquent dans l'autre.

L'on paraît généralement penser que le corps solaire est complètement liquide. Pour moi, je persiste à trouver que, dans cette hypothèse, on ne s'expliquerait point bien la formation des taches. Je m'en rends compte, au contraire, en supposant que la masse liquide du soleil est légèrement solidifiée à sa surface. Dans ce cas, des volcans solaires peuvent se produire, au moyen de l'accumulation de vapeur formées sous la croûte de l'astre, et des éruptions, jointes à des tourbillons atmosphériques que j'ai aussi admis, peuvent lancer jusqu'à la photosphère les particules qui servent à l'alimenter, comme je l'ai dit plus haut, et produire dans les enveloppes solaires des cavités qui laissent apercevoir le corps solaire.

Ce corps n'est point froid, tant s'en faut; mais, en supposant même qu'il soit à la chaleur rouge, on conçoit qu'il puisse, surtout sous le voile de l'atmosphère solaire, dont la densité s'accroît vers les régions profondes, paraître sombre, *noir*, relativement à l'éclat si intense de la lumière photosphérique.

Le soleil a sans doute passé par une phase analogue à celle où, suivant M. Faye, il se trouverait encore maintenant; mais il est actuellement et depuis longtemps liquide, et même il est déjà entré dans la phase de solidité par la formation d'une croûte relativement très-mince. Néanmoins on peut supposer qu'il continuera fort longtemps à rayonner de la chaleur et de la lumière, car sa masse est tellement grande et sa chaleur interne est tellement intense que les éruptions volcaniques si fréquentes, si nombreuses qui l'agitent et

fournissent à la photosphère une alimentation continuelle, pourront se produire pendant un temps bien long aussi. J'ai d'ailleurs indiqué d'autres sources possibles d'entretien de la chaleur et de la lumière solaires.

Je ne trouve pas vraisemblable que le soleil soit encore tout gazeux, complétement à l'état gazéiforme, comme le dit M. Faye. Dans cette hypothèse, il serait difficile d'admettre qu'il pût conserver sa forme si sensiblement sphérique ; et puis il y a bien longtemps, il y a, je pense, des millions de siècles que cet astre s'est formé, et il a dû tendre de plus en plus à se condenser, à se liquéfier. A ce point de vue encore, il me paraît qu'il ne peut être, à beaucoup près, dans l'état primitif, et suis porté à penser qu'il est arrivé à l'état de liquidité générale et même de consolidation superficielle.

Je ne veux pas revenir ici sur toutes les considérations qui m'ont fait rejeter les systèmes contraires à celui que j'ai présenté et soutenu comme le plus plausible. Le lecteur les trouvera développées dans mon œuvre sur le *Soleil* et dans la note citée plus haut.

Toutefois j'ai, à ce sujet, quelques observations et réflexions à présenter.

La grande objection élevée contre la théorie que j'ai admise, c'est l'énorme chaleur de la photosphère qui, dit-on, ne permet pas de supposer que le corps solaire ne soit pas incandescent, et qu'il puisse paraître noir à travers les cavités photosphériques ; et l'on est d'autant plus porté à rejeter cette théorie que l'on tend fortement à penser que les substances qui entrent dans la constitution du soleil ne sont autres que celles ou une partie de celles que nous connaissons et qui composent le globe terrestre. En faveur de cette dernière opinion, on

invoque généralement et les résultats de l'analyse spectrale et la théorie de Laplace pour expliquer la formation du soleil et des planètes ; hypothèse que l'on adopte comme étant, prétend-on, la plus rationnelle qu'on puisse concevoir pour cette explication. Pour moi, je l'ai rejetée ; par bien des raisons, je ne saurai l'admettre, et, d'ailleurs elle n'implique pas que dans le soleil il ne puisse y avoir d'autres substances que celles qui entrent dans la constitution de la terre.

En somme, les résultats obtenus par les observations spectrales sont admirables, mais il me paraît que les conséquences qu'on en tire sont parfois loin d'être incontestables. Il y a d'ailleurs souvent des doutes à concevoir sur la signification des raies observées.

Des observations spectrales on a conclu que le soleil contient divers métaux connus, notamment du sodium, du potassium, du magnesium, du fer, du nickel, du chrome; et comme les raies du lithium, de l'aluminium, du zinc, du cuivre, etc., n'apparaissent pas dans son spectre, plusieurs ont dit que le soleil ne contient pas ces métaux-là. Quant aux étoiles qui ont été observées, quelques-uns ont trouvé qu'elles possèdent telles substances connues que, par exemple, l'étoile Pollux contient du sodium, et que ce métal n'existe pas dans Sirius, mais qu'en revanche cette étoile possède du fer.

En observant diverses nébuleuses, on a vu dans leurs spectres des raies analogues aux raies de l'hydrogène, et parfois aussi celles de l'azote, et plusieurs n'ont pas hésité à penser que ces grands corps ne renferment que de l'hydrogène seulement, ou seulement de l'hydrogène et de l'azote.

Or, en admettant même que ces conclusions soient cer-

taines en tant que positives, je les révoquerais en doute en tant que négatives. Si beaucoup ont été prompts à les accueillir sous ces deux rapports, c'est qu'on ne voudrait pas laisser penser qu'il existe d'autres substances que celles que nous pouvons connaître et que contient notre globe. Il y a, je le répète, une forte tendance à en composer l'univers entier, les myriades d'étoiles et de planètes qui sans doute gravitent autour d'elles.

Les partisans de l'unité sont très-portés à ratifier ces conclusions hasardées; ils vont même jusqu'à penser qu'il n'y a, en réalité, qu'une seule substance élémentaire : l'hydrogène. Toutes les autres molécules ne seraient que des agrégats de parties d'hydrogène diversement disposées entre elles. Ils ne manquent pas d'évoquer, à l'appui d'une opinion aussi excentrique, les spectres des nébuleuses.

Pour moi, je crois que l'on va souvent trop vite dans la voie des inductions, en ce qui concerne ces sortes d'études. Suivant les appréciations de quelques savants, au sujet des spectres, la terre aurait, à elle seule, un bien plus grand nombre de substances différentes que les autres astres observés, que le soleil et ses planètes notamment. N'est-ce pas traiter un peu cavalièrement l'astre majestueux qui nous prodigue sa chaleur et sa lumière et qui doit probablement devenir une énorme et magnifique planète, que de réduire ses substances a quelques corps, que de décider qu'il est bien moins riche sous ce rapport que notre petit globe, qu'il ne contient pas, même dans ses couches profondes, des corps autres que ceux que le spectroscope nous montre avec plus ou moins de netteté et de certitude dans son atmosphère ou sa photosphère.

Si la terre pouvait être observée d'un autre astre, du soleil, par exemple, le spectre de son atmosphère donnerait-il donc les raies relatives à tous les corps que renferme notre globe? Non sans doute. Pourquoi donc viendrait-on assurer que le soleil ne contient pas des substances inconnues, différant même de celles que peut contenir notre terre dans ses profondeurs, et que nos observations ne sauraient atteindre?

A l'égard des nébuleuses, ce qui me paraît très-plausible, c'est que, outre les gaz hydrogène ou autres qui paraisssent être à leur surface, elles contiennent, au-dessous, vers leurs centres, des substances plus lourdes, dont on ne peut percevoir les spectres. Au reste, il paraît qu'on a reconnu la raie du sodium dans quelqu'une des nébuleuses observées. On pense généralement que ces masses gazeuses ou vaporeuses sont des astres en voie de formation : mais que pourraient être ces astres futurs qui ne seraient formés que d'hydrogène, ou que d'hydrogène et d'azote? Quoi qu'il en soit, l'hypothèse de l'unité substantielle n'est pas soutenable : je ne trouve pas raisonnable, notamment, de supposer que l'essence de l'hydrogène n'est autre que celle de l'oxygène, que l'azote et le carbone sont substantiellement même chose. Je crois avoir montré dans mes *Discussions sur les principes de la physique* que la pluralité substantielle est nécessaire pour expliquer les phénomènes physiques et chimiques.

Outre les raies du spectre solaire qui ont plus particulièrement attiré l'attention, qu'on reconnaît pour être celles de substances connues, il y a dans ce spectre une foule innombrable de raies, dont plusieurs sont très-notables, et l'on peut penser qu'elles répondent, en totalité ou partie, aux spectres d'autres substances, de

corps essentiellement différents des corps terrestres. On considère généralement ces raies-là comme ayant leur cause dans l'atmosphère terrestre. On se fonde sur ce que l'air est légèrement coloré et sur des expériences qui montrent que, si l'on fait passer un rayon lumineux à travers un gaz coloré, avant de rencontrer le prisme, les raies paraissent en plus grand nombre; ou bien l'on suppose que notre atmosphère contient des substances qui ont pour effet de produire les raies observées qu'on ne regarde pas comme dues au soleil. On allègue qu'elles changent avec l'état de l'atmosphère terrestre. — Ces considérations ont peu de valeur. Que la composition de l'atmosphère terrestre influe jusqu'à un certain point sur les spectres, je l'accorde; mais il n'est pas vraisemblable que toutes les raies du spectre solaire, excepté les quelques raies dites caractéristiques, doivent leur existence à cette cause. N'y a-t-il pas, d'ailleurs, un motif plausible pour écarter cette hypothèse? N'est-il pas vrai que les spectres des étoiles qu'on a observées, présentent relativement et généralement peu de raies? cependant, si la cause de la plus grande partie des raies solaires était dans notre atmosphère, ne devrait-elle pas en donner un grand nombre dans les spectres stellaires?

On allègue que, quand le soleil est à l'horizon, certaines raies de son spectre paraissent plus larges, plus nettes; et l'on attribue cette différence à ce que, dans cette position, les rayons solaires ont à traverser une plus grande étendue d'atmosphère terrestre; mais ce fait ne peut suffire pour faire attribuer la plupart des autres raies à l'influence de notre atmosphère.

On objecte que, dans une éclipse de soleil, le spectre

donné par les rayons émanés du bord de l'astre, où l'atmosphère solaire devait offrir plus d'épaisseur à l'observation, n'a pas présenté plus de raies ni des raies plus intenses, que les spectres obtenus par l'observation du disque solaire; mais cette remarque, juste ou non, s'appliquant à l'intensité des raies dites caractéristiques, comme à l'intensité des autres raies, on ne peut pas y attacher une grande importance. D'ailleurs, d'après les discussions que j'ai présentées précédemment, soit dans cette œuvre, soit dans mon livre sur le Soleil, au sujet de la constitution de cet astre et de son atmosphère, c'est sans doute dans une couche peu épaisse de cette atmosphère que résident surtout les corps qui donnent des raies spectrales; il n'est donc pas étonnant que les spectres du centre et celui des bords ne diffèrent pas sensiblement.

A vrai dire, aucune raie du spectre solaire n'est invariable. Il en est qui présentent plus de fixité que les autres; mais aucune n'est absolument immuable, sans excepter même celles qu'on dit caractéristiques, dont on attribue la cause à des substances connues; car sans doute le soleil lui-même change d'état, et son atmosphère, comme l'atmosphère de la terre, est plus ou moins sujette à des variations. Que telles raies aient plus de constance, de persistance de lieu, de disposition, d'intensité, je ne le nie pas; mais cela ne prouve pas qu'aucune des autres ne puisse être due à quelque substance inconnue existant dans le soleil. Il y a d'ailleurs dans le spectre de cet astre des raies qui, sans pouvoir être attribuée à telle substance, ont, si je ne me trompe, autant de fixité que celles dont on croit pouvoir préciser la cause substantielle.

Nous avons vu que, suivant M. *Rayet*, on aperçoit six raies dans le spectre des protubérances solaires ; que de ces six raies, quatre appartiennent à l'hydrogène, et les deux autres indiquent la présence d'un ou plusieurs corps iuconnus. Nous avons vu aussi que, d'après des observations du P. Secchi, l'atmosphère solaire est une atmosphère très-composée, dont il n'a pu reconnaître toutes les substances. Il a nié notamment que les deux raies *b* soient celles du magnesium. Il a assuré que dans l'atmosphère du soleil il existe des éléments qui donnent des raies brillantes autres que celles de l'hydrogène et qu'il n'a pu attribuer à des substances connues.

Ce ne sont pas seulement les spectres du soleil qui tendent à contrarier l'opinion que les astres ne contiennent que des corps terrestres. Il paraît bien que les atmosphères de Jupiter et Saturne donnent des raies qu'on ne saurait rapporter à aucune substance déterminée.

Les météorites, les pierres tombées du ciel sur la terre ne sont, assure-t-on, composées que d'éléments connus, signalés par les analyses qu'on a faites de ces corps ; mais cela ne prouve point l'universalité des substances terrestres.

Quelle est l'origine de ces pierres ? Nous viennent-elles de la lune ? Faut-il les considérer comme de très-petites planètes ou des débris de planètes ? Récemment, M. Stanislas Meunier, dans le *Cosmos*, a présenté une hypothèse ingénieuse qui me paraît acceptable. Il pense que ces corps ne sont autre chose que des fragments de quelque astre qui, il y a bien longtemps, s'est peu à peu desséché, fendillé, puis s'est démoli par suite de son desséchement même et des fentes opérées dans cet

astre et agrandies de plus en plus. Dans cette hypothèse, on pourrait s'attendre à voir tomber sur notre globe des débris très-divers quant à leur composition, car sans doute le centre de l'astre n'était pas substantiellement semblable aux couches superficielles. On pourrait supposer que cet astre s'était formé peu loin de la terre, que même il en était un satellite, et que sa destruction a précédé de beaucoup les temps historiques. Les météorites qu'on a analysées ne contenaient pas d'oxygène ; elles auraient cela de commun avec les roches ignées de la terre.

Dernièrement M. Respighi, astronome de Rome, dans une lettre adressée aux *Mondes* et que cette revue a insérée dans son numéro du 30 décembre 1869, dit que des observations qu'il a faites sur le soleil, il lui paraît qu'on peut conclure qu'il se produit des éruptions à la surface de cet astre ; que ces éruptions changent continuellement de forme, quoiqu'elles puissent rester en activité pendant plusieurs jours ; que dans le voisinage des pôles du soleil ces éruptions n'ont pas lieu ou du moins ont des proportions très-limitées ; que les protubérances ont une étroite relation avec les facules et probablement avec les taches ; que les voiles obscurs ou les faibles pénombres qui apparaissent çà et là sur la surface du soleil ont probablement pour cause l'absorption produite par la matière diffuse de ces jets.

La hauteur énorme à laquelle ces jets peuvent s'élever en très-peu de temps, lui semble prouver la faible résistance qui leur est opposée par l'atmosphère solaire. Les transformations ou diffusions rapides de ces jets, surtout dans les hautes régions, et la suspension ou la lenteur de la descente des matières vomies ne lui pa-

raissent pas pouvoir s'expliquer par la seule gravité du soleil combinée avec l'action des courants que l'on suppose exister dans l'atmosphère solaire ; il croit donc qu'il faut avoir recours à une force répulsive entre les particules des matières vomies, et la matière même de la surface du soleil, comme il arriverait, par exemple, si la surface solaire se trouvant dans un état électrique, les matières vomies prenaient, en s'élevant, le même état.

La forme nette, bien définie et persistante pendant quelque temps, que l'on aperçoit à la base de ces jets et au point où ils s'élancent de la surface solaire, ne lui paraît pas pouvoir s'expliquer sans admettre dans le corps du soleil *une croûte très-résistante.*

Bien que M. Respighi évite de se prononcer définitivement sur la constitution du soleil, et qu'il n'émette ces idées que sous la réserve des observations nouvelles auxquelles il compte se livrer, je ne saurais dédaigner l'appui que, sous divers rapports essentiels, cette lettre apporte à la théorie que j'ai émise.

NOTES

I

Des forces moléculaires et de leur influence dans les mouvements des corps

Déjà, dans un livre et une note cités dans l'ouvrage qui précède, j'ai montré que les phénomènes généraux de la physique ne pouvaient s'expliquer que dans l'hypothèse de deux forces antagonistes tendant l'une à rapprocher les molécules les unes des autres, et l'autre ayant une tendance contraire ; j'ai montré qu'il faut supposer que les molécules s'attirent mutuellement et qu'entre elles se trouve un fluide dont les particules extrêmement ténues se repoussent réciproquement ; que plus les molécules sont rapprochées, plus elles s'attirent, et que, plus les particules du fluide sont rapprochées, plus elles se repoussent. Quant aux divers degrés d'attraction et de répulsion, exercées suivant les distances, je n'ai pu et ne pourrais encore rien préciser sous ce rapport.

Dans la présente note, je vais principalement, et sous certains rapports, rechercher quelle est l'influence que peuvent avoir ces forces dans les mouvements des corps, notamment lorsqu'ils sont soumis à une autre force appliquée à un de leurs points matériels.

Tâchons d'abord de reconnaître si, dans l'hypothèse d'un corps en repos, dont toutes les parties seraient en équilibre, les forces moléculaires sont telles quelles puissent être également distribuées dans toutes les parties de ce corps.

Supposons d'abord que le corps ne soit composé que de deux molécules *a*, *b*, semblables, s'attirant ainsi également, et qu'entre elles il y ait une certaine quantité de particules d'éther semblables telles que, par leur action, elles contrebalancent exactement l'attraction mutuelle de ces deux molécules, de sorte que celles-ci soient en parfait équilibre et restent immobiles tant qu'une autre force ne viendra pas agir sur elles ou sur l'une d'elles. Dans cette hypothèse, les particules de l'éther placées entre les molécules du corps devront être symétriquement placées, distribuées relativement à ces mêmes molécules.

Si, au lieu de deux molécules, il y en a trois, *a*, *b*, *c*, placées, dans l'ordre de ces lettres, sur une même ligne droite, à égale distance entre elles, et qu'elles soient en équilibre, en repos, l'éther placé entre deux d'entre elles, *a* et *b*, devra être dans les mêmes conditions de quantité et de distribution que celui placé entre *b* et *c*.

Soient maintenant quatre molécules semblables, *a*, *b*, *c*, *d*, situées dans cet ordre et à égale distance, sur une même ligne. Si elles sont en parfait équilibre, l'éther placé entre deux, *a* et *b*, sera dans les mêmes conditions de quantité et de distribution que celui résidant entre *c* et *d*; mais entre *b* et *c* quelle sera la quantité et la distribution du fluide? seront-elles exactement les mêmes que celles du fluide existant entre *a* et *b*, *c* et *d*? Il est plausible que, sous ces rapports, il y aura quelque différence; car, dans l'équilibre, la quantité et la distribution du fluide intermoléculaire doivent être subordonnées à la disposition relative des molécules du corps; or, dans *a*, *b*, *c*, *d*, *b* et *c* qui forment le milieu ne sont pas disposées relativement aux autres, absolument comme *a* et *b*, *c* et *d*; *a*, l'une des molécules extrêmes n'est attirée que d'un côté et elle l'est plus ou moins par trois molécules *b*, *c*. *d*; de même *d*, l'autre molécule extrême, n'est attirée que d'un côté et l'est par les trois *c*, *b*, *a* à divers degrés, tandis que *b* est attirée d'un côté par deux molécules

c et *d*, et de l'autre par une seule *a*; et il en est ainsi de *c*, à l'égard de *a* et *b* d'une part, et de *d* de l'autre part.

Si donc les molécules *a*, *b*, *c*, *d* sont réellement semblables, placées sur une même ligne, à égale distance entre elles, pour qu'elles pussent être en équilibre, il faudrait que le fluide, résidant entre *b* et *c*, fût dans des conditions, soit de quantité, soit de distribution, autres que les conditions dans lesquelles se trouverait le fluide situé entre les molécules *a* et *b*, *c* et *d*. Cela est vrai, quelles que soient les lois que suivent les forces moléculaires dans leurs actions, quels que soient les degrés de leurs actions selon la variation des distances où elles s'exercent. Et l'on voit aussi que si les molécules d'un corps de forme quelconque, régulière ou non, pouvaient être en parfait repos, en completé quilibre entre elles par l'exacte pondération de leur force d'attraction ou de cohésion, et des forces répulsives de l'éther intermédiaire, ou bien les molécules contiguës considérées deux à deux ne seraient pas également espacées, ou bien le fluide placé entre elles varieraient en quantité ou distribution entre les molécules contiguës considérées aussi deux à deux. Mais sans doute ces différences, ces variations sont extrêmement petites.

Au reste, il est aisé de reconnaître que si un corps est formé de plus d'un rang de molécules, et tous ceux que nous percevons sont en ce cas, il est impossible, géométriquement, que la distance existant entre deux molécules contiguës dans ce corps, soit partout exactement la même.

Considérons une série de molécules *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*.... placées sur une même ligne droite à distance égale ou à très peu près égale les unes des autres. Si *a*, la première de ces molécules est soumise à une force P qui tende à l'éloigner ou à la rapprocher des autres dans la direction même de la série, toutes les molécules de la série seront mises en mouvement, mais avec des vitesses qui ne seront pas exactement égales : ces vitesses iront en décroissant à partir de *a* et varieront en raison du rapport existant entre les forces d'attraction ou de cohésion et les forces répulsives intermoléculaires. Il pourra se faire que toutes les molécules prennent une vitesse à très-peu près égale, ou que leurs différences soient relativement grandes et même très-sensibles. Les corps durs, éminemment

élastiques, sont dans le premier cas. Dans l'un et l'autre cas, plus il y aura de molécules, moins sera grande la vitesse qui leur sera communiquée par une même force P. On le conçoit aisément. Si, par exemple, la première molécule *a* est soumise à une force qui tende à l'éloigner des autres *b*, *c*, *d*... *a* sera retardée par l'attraction de *b*, *b* le sera par l'attraction de *c*, et ainsi de suite, de telle sorte que plus il y aura de molécules dans la série, plus chaque molécule sera retardée dans le mouvement qu'elle prendra par suite de l'action directe de P sur *a*. D'ailleurs, une molécule quelconque n'est pas attirée seulement par la molécule ou les molécules qui lui sont contiguës, elle l'est aussi quelque peu par les molécules suivantes : *a*, dans l'espèce, sera donc retardée jusqu'à un certain point par l'attraction directe de *b*, *c*, *d*, etc. — Si la force P tend au contraire à rapprocher *a* de *b*, et par suite à presser la série, à la pousser dans le sens de *a* en *b*, *a* sera retardée par l'effet de sa propre attraction sur *b*, qui tend à empêcher cette dernière molécule de suivre l'impulsion de *a*, et par la répulsion de l'éther comprimé entre *a* et *b*. De même *b* sera retardée par l'effet de l'attraction qu'elle exerce sur *c*, et par le fluide intermoléculaire de *b* en *c* ; et ainsi de suite. La résistance à la force P augmentera donc avec le nombre des molécules de la série.

D'après cela, en considérant la liaison existante entre toutes les molécules d'un même corps, on conçoit qu'en général l'effet d'une force sur un corps puisse être en raison inverse de sa masse ; mais cela ne peut être regardé comme une loi absolue.

Soient encore *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*... des molécules placées sur une même ligne droite, à égale distance les unes des autres et liées entre elles par la cohésion. Si la première *a* est soumise à une force P dirigée normalement à la ligne des molécules et que par suite, en un instant, *a* vienne en un point K, son attraction et son mouvement vers K feront marcher parallèlement à ce mouvement ou à peu près la molécule suivante *b*, mais celle-ci viendra à un point qui sera moins éloigné de la ligne primitive *a*, *b*, *c*, *d*, etc., que le point K où la molécule *a* sera portée elle-même par la force P. De même la molécule *c* marchera moins que *b*, et ainsi de suite, de sorte que la série des molécules ne sera pas déplacée parallèlement à elle-même, mais obliquement.

Il est d'ailleurs plausible que ce déplacement de la série ne se fera pas suivant une ligne exactement droite. Pour le voir, il suffit de considérer que les molécules de la série ne sont pas absolument dans les mêmes conditions les unes à l'égard des autres, ainsi que je l'ai expliqué plus haut.

Par la même considération, si la série est tirée normalement à chacune de ses extrémités par une force P, les actions de ces forces feront fléchir la ligne à son milieu, mais sans doute la déformation ainsi produite ne sera pas exactement semblable à celle qui se produirait si une seule force égale à 2P était appliquée au milieu de la série.

J'ai supposé que les forces appliquées l'étaient normalement à la direction de la série, mais on devrait arriver à des conclusions analogues dans les cas où les forces seraient appliquées obliquement à cette direction.

Si des forces appliquées à une série étaient inégales, ou non parallèles, la déformation varierait suivant les cas, et elle ne serait pas symétrique, excepté dans le cas où les forces seraient égales, et symétriquement placées et dirigées par rapport à la série.

Ce que je viens de dire pour la série de molécules que j'ai supposée, montre, jusqu'à un certain point, comment se comporterait une barre composée de plusieurs séries semblables, parallèlement et régulièrement superposées, lorsqu'elle serait soumise à l'action d'une ou plusieurs forces; car, à cause de la cohésion existante entre toutes ses molécules, des forces qui seraient appliquées à des molécules de cette barre, devraient déterminer dans la barre entière des mouvements analogues, à peu près semblables à ceux qu'elles produiraient dans les séries où elles seraient appliquées.

Inutile d'ajouter que si le corps était de forme irrégulière ou composé de molécules irrégulièrement disposées entre elles, et c'est sans doute ce qui a lieu, généralement du moins, la déformation produite par l'application d'une ou plusieurs forces varierait suivant les cas et ne serait pas symétrique, hors le cas où le corps, sans être régulier, offrirait des points symétriquement placés, auxquels seraient appliquées des forces égales symétriquement dirigées.

II

De la théorie relative aux couples, d'après Cauchy.

Cette théorie se trouve exposée dans l'ouvrage de M. l'abbé Moigno, intitulé : *Leçons de Mécanique analytique*. Je vais la reproduire avec les développements qui me paraissent nécessaires à sa complète intelligence.

« Si d'un point O (fig. 88) pris dans l'espace, à volonté, on abaisse la perpendiculaire OE sur la direction d'une force donnée AB = P, le produit de cette perpendiculaire par la force elle-même, représentera le double de la surface du triangle AOB, qui a pour base la force AB, et pour sommet le point O. Ce même produit équivalent, comme on vient de le dire, au double de la surface OAB, est ce qu'on appelle le *moment* de la force P par rapport au point O. De plus, le plan du triangle OAB, ou, en d'autres termes, le plan qui passe par le point O et par la force AB est ce qu'on nomme le *plan du moment*. Cela posé, il est clair que le moment d'une force AB reste le même, lorsque, sans changer l'intensité et la direction de la force, on déplace le point d'application A, de manière à le transporter en un autre point A' (fig. 89) de la direction dont il s'agit. En effet, si sur la droite AB prolongée on prend A'B' = AB, les deux triangles OAB, OA'B', ayant même base et même hauteur, auront évidemment des surfaces égales.

» Le moment d'une force n'étant autre chose que le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur sa direction, le point à partir duquel on abaisse la perpendiculaire s'appelle l'origine ou le *centre des moments*. Le plus souvent on place le centre des moments à l'origine même des coordonnées. La droite OA menée du centre des moments au point d'application de la force sera désignée sous le nom de *rayon vecteur*. Ce rayon vecteur est l'un des côtés du triangle OAB dont la surface doublée équivaut au moment de la force AB ; d'où il est aisé de conclure que l'on obtiendra encore un produit égal à ce

moment, si l'on multiplie le rayon vecteur OA par la perpendiculaire BC (fig. 90) abaissée du point B sur le rayon vecteur, ou, ce qui revient au même, par la projection AB' de la force AB sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur.

» Si l'on projette sur un plan quelconque le centre des moments et la force AB, on obtiendra en même temps, pour projection du triangle OAB, un nouveau triangle qui aura pour sommet la projection du point O, et pour base la projection de la force AB. Ce nouveau triangle sera donc celui dont la surface doublée mesure le moment de la force projetée par rapport à la projection du centre des moments. Ainsi le moment de la projection d'une force sur un plan quelconque est égal à la projection sur ce même plan d'une surface équivalente au moment de la force donnée et comprise dans le plan du moment. C'est ce que nous exprimerons en disant que *le moment de la projection d'une force ne diffère pas de la projection de son moment.*

» Le plan du moment d'une force AB = P peut tourner dans deux sens différents autour du centre des moments. Si l'on vient à fixer ce même centre, et que le rayon vecteur se change en une droite rigide, la force appliquée à l'extrémité mobile de cette droite tendra évidemment à imprimer au plan du moment un seul des deux mouvements de rotation qu'il peut recevoir. Supposons que ce mouvement ait lieu, et que l'on ait élevé par le centre des moments un demi-axe perpendiculaire au plan. Un spectateur, qui aurait les pieds posés sur ce plan et qui serait appuyé contre le demi-axe, verrait les différents points du plan se mouvoir en passant devant lui, de sa droite à sa gauche ou de sa gauche à sa droite. On doit observer au reste que, si par le centre des moments on élevait à la fois deux demi-axes perpendiculaires au plan du moment, le même mouvement de rotation paraîtrait s'effectuer autour de l'un de ces demi-axes de droite à gauche, et autour de l'autre de gauche à droite. Revenons maintenant au cas où l'on trace un seul demi-axe, et supposons que ce soit précisément celui autour duquel le mouvement de rotation s'effectue de droite à gauche. Si, à partir du centre des moments, on porte sur le demi-axe une longueur numériquement égale au moment de la force P, on

obtiendra ce que nous appellerons le *moment linéaire de cette force*. La *direction* de ce moment linéaire sera celle du demi-axe sur lequel il se compte, et son *intensité* aura pour mesure le moment même de la force P.

» Concevons à présent que dans le plan du moment de la force P ou AB (fig. 91) on fasse varier cette force en grandeur et en direction, de sorte qu'elle se change en une nouvelle force P' ou AB' toujours appliquée au point A, et propre à faire tourner le plan dans le même sens que la première autour du centre des moments. Les moments linéaires des deux forces P et P' devront être portés sur le même demi-axe ; et si l'on projette ces deux forces AB, AB' sur un plan mené par le point A perpendiculairement au rayon vecteur, les projections AC, AC' auront encore la même direction. Imaginons ensuite que le plan du moment de la force P' vienne à se détacher du plan du moment de la force P en tournant d'une certaine quantité autour du rayon vecteur (fig. 92). Pendant ce mouvement, deux demi-axes perpendiculaires au rayon vecteur aboutissant à deux points différents de ce rayon, et assujettis à tourner autour de ces points avec le plan du moment de la force P', décriront évidemment des angles égaux. Or, comme on peut supposer que ces deux demi-axes coïncident, le premier avec la projection AC' de la force P' sur le plan mené par le point A perpendiculairement au rayon vecteur, le second avec le demi-axe OL' mené par le point O, et sur lequel on compte le moment linéaire de la même force, nous devons conclure qu'après l'arrivée de la force P' dans sa nouvelle position, les moments linéaires OL, OL' des forces P, P' comprendront entre eux le même angle que les projections AC, AC' de ces forces sur le plan perpendiculaire au rayon vecteur. Il est d'ailleurs essentiel d'observer qu'il suffit de choisir convenablement l'intensité de la force P', sa direction par rapport au rayon vecteur dans le plan, et la quantité dont on fait tourner ce même plan, pour que cette force, parvenue dans sa nouvelle position coïncide avec une force quelconque menée par le point A. On peut donc énoncer la proposition suivante :

» *Si deux forces quelconques, appliquées au point A, sont pro-*

jetées sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur, qui joint le point A avec le centre des moments, les projections formeront entre elles le même angle que les moments linéaires des forces données.

» Considérons maintenant avec deux forces P, P', simultanément appliquées au point A (fig. 93), la résultante de ces deux forces. Soient O, le point pris pour origine des moments, OA le rayon vecteur ; et supposons que l'on construise tout à la fois les moments linéaires des forces P, P', R, avec les projections de ces forces sur le plan mené par le point A perpendiculairement au rayon vecteur. D'après ce qu'on vient de dire, les moments linéaires formeront entre eux les mêmes angles que les projections des forces correspondantes ; et, de plus, ces moments seront, en vertu de la définition même, respectivement égaux aux produits qu'on obtient en multipliant le rayon vecteur par les projections dont il s'agit. Cela posé, concevons : 1° que les droites AB, AC, AD représentent en grandeur et en direction les projections des forces P, P', R ; 2° que les droites OE, OF, OG représentent en grandeur et en direction leurs moments linéaires. Ces trois dernières droites seront proportionnelles aux trois premières puisque l'on a

$$OE = OA \times AB, \quad OF = OA \times AC, \quad OG = OA \times AD ;$$

et, prises deux à deux, elles formeront entre elles les mêmes angles. Par suite les deux figures ABCD, OEFG seront des figures semblables. Or la force projetée AD étant la résultante des forces projetées AB, AC, puisque la projection de la résultante est aussi la résultante des projections, la figure ABCD est nécessairement un parallélogramme, donc la figure OEFG en sera un également. Donc le moment linéaire OG de la résultante R sera la diagonale du parallélogramme construit sur les moments linéaires des composantes ; et pour l'obtenir il suffira de mener, par l'extrémité du moment linéaire de la force P, une droite égale et parallèle au moment de la force P', puis de joindre le centre des moments avec l'extrémité de cette droite. Ainsi les moments linéaires se *composent* comme les forces elles-mêmes et à l'aide de la même construction. Cette remarque ne se borne pas au cas où l'on considère deux composantes, elle

s'étend à un nombre de forces quelconques P, P', P"...; car il est clair qu'en répétant plusieurs fois de suite la construction indiquée, d'une part sur les forces combinées deux à deux, de l'autre sur les moments linéaires correspondants, on obtiendra par le même procédé : 1° la résultante de toutes ces forces; 2° le moment linéaire de cette résultante. Enfin la remarque subsiste, quelles que soient les directions des forces données, et celles de leurs moments linéaires respectifs, et par conséquent dans le cas même ou quelques-unes de ces directions viendraient à coïncider.

» Pour indiquer que le moment linéaire de la résultante de plusieurs forces P, P', P"..., résulte de la composition de leurs moments linéaires, nous le désignerons désormais sous le nom de moment linéaire résultant.

» Dans le cas particulier où le plan des moments de deux forces coïncide, c'est-à-dire lorsqu'un seul plan renferme à la fois le centre des moments et les deux forces, leurs moments linéaires se comptent évidemment sur un seul axe perpendiculaire au plan dont il s'agit. De plus, ils se comptent sur cet axe, dans le même sens ou dans des sens opposés, suivant que les forces données tendent à faire tourner le plan qui les renferme dans le même sens ou en sens contraires. Si toutes les forces P, P', P"..., appliquées au point matériel A, se trouvaient comprises avec le centre des moments dans un plan unique, tous les moments linéaires se comptant alors sur le même axe, le moment linéaire de la résultante serait égal à la somme des moments linéaires des composantes, pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que les forces correspondantes tendraient à faire tourner le plan de tous les moments dans le même sens que la résultante ou en sens inverse.

» Revenons au cas où les moments linéaires des forces P, P'... ont des directions quelconques. Dans ce cas, au lieu de construire géométriquement le moment linéaire de la résultante, on pourrait déterminer analytiquement son intensité et sa direction. En effet, soit R cette résultante et désignons par

$$p,\ p',\ p''...,\ r$$

les perpendiculaires abaissées du centre des moments sur les directions des forces

$$P, P', P''..., R,$$

leurs moments linéaires seront représentés par

$$Pp, P'p', P''p''..., Rr,$$

et si l'on suppose que les directions de ces moments linéaires forment respectivement, avec le demi-axe des x positives les angles

$$\lambda, \lambda', \lambda''..., l,$$

avec le demi-axe des y positives les angles

$$\mu, \mu', \mu''..., m,$$

avec le demi-axe des z positives les angles

$$\nu, \nu', \nu''..., n,$$

les produits

$$\begin{array}{l} Pp \cos\lambda, P'p' \cos\lambda', P''p'' \cos\lambda''..., Rr \cos l, \\ Pp \cos\mu, P'p' \cos\mu', P''p'' \cos\mu''..., Rr \cos m, \\ Pp \cos\nu, P'p' \cos\nu', P''p'' \cos\nu''..., Rr \cos n, \end{array}$$

seront ce qu'on peut appeler la projection algébrique des moments linéaires dont il s'agit sur les axes x, y, z. Cela posé, puisque le moment linéaire Rr est à l'égard des autres ce qu'est la résultante R à l'égard des forces P, P', P''..., les relations trouvées entre les projections algébriques des forces P, P', P''..., R subsisteront entre les projections algébriques des moments linéaires Pp, $P'p'$, $P''p''$..., Rr. En conséquence la projection algébrique sur chaque axe du moment linéaire résultant, sera égale à la somme des projections algébriques sur le même axe des moments linéaires des composantes. On aura donc les trois équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Rr\cos l = Pp\cos\lambda + P'p'\cos\lambda' + P''p''\cos\lambda'' + ..., \\ Rr\cos m = Pp\cos\mu + P'p'\cos\mu' + P''p''\cos\mu'' + ..., \\ Rr\cos n = Pp\cos\nu + P'p'\cos\nu' + P''p''\cos\nu'' + ... \end{array} \right.$$

Si à ces trois équations on réunit la suivante :

$$(2)\qquad \cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1$$

on obtiendra quatre équations suffisantes pour déterminer les valeurs des quatre inconnues Rr, l, m, n, c'est-à-dire la direction et l'intensité du moment linéaire résultant, toutes les fois qu'on connaîtra en grandeur et en direction les moments linéaires des forces P, P', P"...

Les seconds membres des équations (1) étant, dans cette hypothèse, des quantités connues, si, pour abréger, on les désigne par L, M, N, on aura

$$(3)\qquad Rr\cos l = L,\ Rr\cos m = M,\ Rr\cos n = N.$$

Or on tire de ces dernières équations, en ayant égard à la formule (2)

$$R^2r^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Donc par suite

$$(4)\qquad Rr = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

« L'intensité Rr ou la grandeur du moment linéaire résultant étant ainsi déterminée, on obtiendra les angles l, m, n, que sa direction forme avec les axes des coordonnées positives, par le moyen des équations

$$(5)\qquad \cos l = \frac{L}{Rr},\ \cos m = \frac{M}{Rr},\ \cos n = \frac{N}{Rr};$$

ces angles seront aigus ou obtus, suivant que les quantités L, M, N seront positives ou négatives.

» Les calculs qui précèdent subsistent quel que soit le point de l'espace qu'on ait pris pour centre des moments. Dans le cas particulier où ce centre coïncide avec l'origine des coordonnées, on peut exprimer les projections algébriques du moment linéaire de chaque force au moyen de l'intensité de cette force, des coordonnées de son point d'application et des angles que fait sa

direction avec les demi-axes des coordonnées positives. On y parviendra facilement à l'aide des considérations suivantes :

» Le moment de la force P appliquée au point A, savoir Pp, représente, comme on l'a dit ci-dessus, le double de la surface du triangle OAB, qui a pour base la force AB = P, et pour sommet le point O centre des moments, c'est-à-dire dans le cas présent l'origine des coordonnées. La surface de ce triangle est donc 1/2 Pp. En la multipliant par cos λ, c'est-à-dire par le cosinus de l'angle que forme la direction du moment linéaire avec le demi-axe des x positives, on obtient la moitié de la projection algébrique de ce moment linéaire. Or le moment linéaire se comptant sur l'un des deux demi-axes perpendiculaires au plan du moment Pp, et l'axe des x étant perpendiculaire au plan des yz, l'angle λ sera évidemment l'un des angles que le plan des moments fait avec le plan des yz, angles qui, étant suppléments l'un de l'autre, ont, au signe près, le même cosinus. D'ailleurs si l'on multiplie une surface plane par le cosinus de l'angle aigu compris entre le plan qui la renferme et un autre plan pris à volonté, on aura pour produit la projection de la surface plane sur ce dernier plan. Donc le produit 1/2 Pp cos λ sera égal, au signe près, à la projection du triangle OAB sur le plan des yz. Donc, par suite, la projection algébrique du moment linéaire, savoir P$p$cos λ, sera égale, au signe près, au double de la surface du triangle projeté, ou, en d'autres termes, au moment de la force P, projetée elle-même sur le plan des yz. Ajoutons que le produit Pp cos λ sera positif ou négatif, suivant que l'angle λ, formé par la direction du moment linéaire avec le demi-axe des x positives, sera aigu ou obtus, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que la force P tendra à faire tourner le plan de son moment de droite à gauche ou de gauche à droite, autour du demi-axe perpendiculaire à ce plan, et qui forme avec le demi-axe des x positives un angle aigu. Or il est clair que la projection de la force P sur le plan des yz tendra elle-même à faire tourner ce dernier plan autour du demi-axe des x positives, de droite à gauche dans le premier, et de gauche à droite dans le second. On peut donc conclure que le produit Pp cos λ, c'est-à-dire la projection algébrique du moment linéaire

de la force P sur l'axe des x, sera égal au moment de la force projetée sur le plan des yz, ce dernier moment étant pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que la force projetée tendra à faire tourner le plan des yz de droite à gauche ou de gauche à droite autour du demi-axe des x positives.

» On prouvera de même que la projection algébrique du moment linéaire de la force P sur l'axe des y ou des z est égale au moment de la force projetée sur celui des plans coordonnés auquel cet axe est perpendiculaire, le dernier moment étant pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que la force projetée tend à faire tourner le plan dont il s'agit de droite à gauche ou de gauche à droite autour du demi-axe des y ou des z positives.

» Considérons maintenant l'angle solide trièdre qui a pour arêtes les trois demi-axes des coordonnées positives et concevons qu'un rayon mobile d'une longueur indéfinie, mené par l'origine, fasse le tour de cet angle solide en s'appliquant successivement sur ses trois faces. Son mouvement sur chaque face sera un mouvement de rotation, de droite à gauche ou de gauche à droite, autour de l'arête perpendiculaire à cette face. De plus, il est aisé de voir que les trois mouvements de rotation sur les trois faces, c'est-à-dire, en d'autres termes, sur les trois plans coordonnés, seront de même espèce. Par exemple, si la disposition des demi-axes des coordonnées positives est celle qui représente la figure 94, et qui se trouve la plus usitée, les trois mouvements de rotation auront lieu de droite à gauche, autour de ces trois demi-axes, lorsque le rayon mobile, faisant le tour de l'angle solide, passera successivement de la position OX à la position OY, et de celle-ci à la position OZ, pour revenir ensuite à la position OX. Si le demi-axe des z positives se trouvait transporté de l'autre côté du plan des yz, alors les mouvements de rotation auraient lieu de droite à gauche, dans le cas où le rayon mobile prendrait successivement les trois positions OX, OZ, OY (fig. 95), pour revenir ensuite directement de la position OY à la position OX.

» Afin de bien distinguer les deux espèces de mouvement que peut prendre un rayon mobile, assujetti à passer par l'origine et

à parcourir l'une après l'autre les trois faces de l'angle solide OXYZ, nous dirons que ce rayon mobile a dans chacun des trois plans coordonnés un mouvement direct de rotation, s'il passe successivement de la position OX à la position OY et de celle-ci à la position OZ. Nous dirons, dans le cas contraire, que le rayon a un mouvement de rotation rétrograde. Cela posé, si l'on adopte la disposition la plus ordinaire pour les demi-axes des coordonnées positives, les mouvements directs de rotation autour de ces demi-axes auront lieu de droite à gauche et les mouvements rétrogrades de gauche à droite, c'est-à-dire que, dans cette disposition, le mouvement est direct lorsqu'il se fait dans l'ordre des lettres.

» La force P pouvant être remplacée par ses trois composantes, la projection algébrique de son moment linéaire sur l'axe des x sera égale à la somme des projections algébriques sur le même axe des moments linéaires de ces trois composantes ou, en d'autres termes, à la somme des moments des mêmes composantes projetées sur le plan des yz, ces derniers moments étant pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que les forces projetées tendront à imprimer au plan des yz un mouvement de rotation direct ou rétrograde. Or les composantes de la force P, parallèles aux axes des x, y, z, sont respectivement égales aux valeurs numériques des trois produits $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$, $P \cos \gamma$. Quand on le projette sur le plan des yz, le premier se réduit à zéro, tandis que les deux autres conservent leurs intensités respectives. De plus, les projections des deux dernières composantes agissent évidemment suivant des droites menées parallèlement aux axes des y et des z, par la projection du point d'application de la force P. Soient x, y, z les coordonnées de ce point dans l'espace. La projection de la composante parallèle à l'axe des z aura un moment égal au produit de son intensité par la perpendiculaire abaissée de l'origine sur sa direction, c'est-à-dire par la valeur numérique de y. Ce moment sera donc représenté par la valeur numérique du produit $P \cos \gamma . y$. On, trouvera de même que la projection de la composante parallèle à l'axe des y a un moment représenté par la valeur numérique du produit $P \cos \beta . z$. Ajoutons que, des deux projections dont

il s'agit, la première tendra à produire un mouvement de rotation direct si P $\cos\gamma$ et y sont de même signe, c'est-à-dire si le produit P $\cos\gamma . y$ est positif, la deuxième si P $\cos 6$ et z sont de signes différents, c'est-à-dire si le produit P $\cos 6 . z$ est négatif. Les mouvements de rotation deviendront rétrogrades dans les suppositions contraires. Par suite, pour obtenir les projections algébriques sur l'axe des x des moments linéaires qui fournissent les deux composantes de la force P parallèles aux axes des z et des y, il faudra prendre le produit P $y \cos 6$ avec le signe $+$ et le produit P$z \cos 6$ avec le signe $-$. La somme des deux résultats, savoir ($y \cos\gamma - z \cos 6$), devant être équivalente à la projection algébrique sur l'axe des x du moment linéaire de la force P, on aura nécessairement

$$Pp \cos\lambda = P(y \cos\gamma - z \cos 6).$$

On trouverait de même en projetant les moments linéaires de la force P et de ses composantes sur les axes des y et des z

$$Pp \cos\mu = (z \cos\alpha - x \cos\gamma),\ Pp \cos\nu = P(x \cos 6 - y \cos\alpha).$$

Il est au reste essentiel d'observer que les trois équations

$$(6) \qquad \begin{cases} Pp\cos\lambda = P(y\cos\gamma - z\cos 6), \\ Pp\cos\mu = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma), \\ Pp\cos\nu = P(x\cos 6 - y\cos\alpha), \end{cases}$$

ont lieu seulement dans le cas où l'on adopte, pour les demi-axes des coordonnées positives, la disposition la plus ordinaire, c'est-à-dire l'orsque les mouvements de rotation de droite à gauche autour de ces demi-axes sont en même temps des mouvements directs et tendent à faire passer un rayon mobile :

dans le plan yz de la direct. des y posit. à la direct. des z posit.
dans » zx » » z » » » x »
dans » xy » » x » » » y »

» Si les mouvements de rotation de droite à gauche autour des mêmes demi-axes devenaient rétrogrades, alors il faudrait remplacer les formules (6) par les suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} Pp\cos\lambda = P(z\cos\beta - y\cos\gamma), \\ Pp\cos\mu = P(x\cos\gamma - z\cos\alpha), \\ Pp\cos\nu = P(y\cos\alpha - x\cos\beta). \end{cases}$$

Lorsque, dans chacune des équations (6) et (7), on supprime le facteur P, commun aux deux membres, elles se réduisent à

$$(8)\quad \begin{cases} p\cos\lambda = y\cos\gamma - z\cos\beta, \\ p\cos\mu = z\cos\alpha - x\cos\gamma, \\ p\cos\nu = x\cos\beta - y\cos\alpha, \end{cases}$$

et

$$(9)\quad \begin{cases} p\cos\lambda = z\cos\beta - y\cos\gamma, \\ p\cos\mu = x\cos\gamma - z\cos\alpha, \\ p\cos\nu = y\cos\alpha - x\cos\beta. \end{cases}$$

Enfin on peut comprendre les équations (8) et (9) dans la seule formule

$$(10)\quad \frac{y\cos\gamma - z\cos\beta}{\cos\lambda} = \frac{z\cos\alpha - x\cos\gamma}{\cos\mu} = \frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{\cos\nu} = \pm p.$$

« Dans ce qui précède, nous avons supposé que le point O, des moments, coïncidait avec l'origine des coordonnées. Imaginons à présent que l'on transporte ce même centre en un point O, dont les coordonnées soient respectivement x_0, y_0, z_0, et cherchons à exprimer les projections algébriques du moment linéaire de la force P par le moyen des quantités P, α, β, γ; x, y, z, x_0, y_0, z_0. Pour y parvenir, on observera que si l'on transportait à la fois le centre des moments et l'origine des coordonnées du point O_0, les coordonnées du point A par rapport à cette nouvelle origine étant alors exprimées par les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, les projections algébriques du moment linéaire

de la force P, par rapport à la même origine, seraient égales, au signe près, aux trois produits

$$\left\{\begin{array}{l} P[(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos 6], \\ P[(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma], \\ P[(x-x_0)\cos 6-(y-y_0)\cos\alpha]. \end{array}\right.$$

» Ces trois derniers produits, pris avec le signe + dans les cas où les mouvements de rotation directs ont lieu de droite à gauche autour des demi-axes des coordonnées positives, et avec le signe — dans le cas contraire, représentent donc les projections algébriques du moment linéaire de la force P, par rapport au point O_0.....

» Cherchons maintenant les équations d'équilibre d'un système composé de plusieurs points liés invariablement entre eux, et sollicités par des forces quelconques. Pour faciliter cette recherche, nous allons d'abord faire connaître quelques propriétés générales d'un semblable système.

» Soient respectivement $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$;... les différents points que l'on considère ; P, P', P''..., les différentes forces qui les sollicitent réduites à une seule pour chacun d'eux. Concevons de plus que ces mêmes forces forment respectivement avec les demi-axes des cordonnées positives les angles

$$\alpha,\ 6,\ \gamma,\ \alpha',\ 6'\ \gamma',\ \alpha''\ 6''\ \gamma'',....$$

Les projections algébriques de la force P sur les axes seront

$$P\cos\alpha,\ P\cos 6,\ P\cos\gamma;$$

tandis que les projections algébriques de son moment linéaire se trouveront représentées, si l'on place le centre des moments à l'origine des coordonnées, par les trois produits

$$P\,(y\cos\gamma-z\cos 6),\ P\,(z\cos\alpha-x\cos\gamma),$$
$$P\,(x\cos 6-y\cos\alpha),$$

et, si l'on place le centre des moments au point qui a pour coordonnées x_0, y_0, z_0, par les suivants

$$P[(y-y_0)\cos\gamma-(z-z_0)\cos\beta],\ P[(z-z_0)\cos\alpha-(x-x_0)\cos\gamma],\ P[(x-x_0)\cos\beta-(y-y_0)\cos\alpha].$$

On peut remarquer d'ailleurs que, pour obtenir ces trois derniers points, il suffit d'ajouter respectivement aux trois premiers les quantités

$$P(y_0\cos\gamma-z_0\cos\beta),\ P(z_0\cos\alpha-x_0\cos\gamma),\ P(x_0\cos\beta-y_0\cos\alpha),$$

prises en signe contraire, c'est-à-dire en d'autres termes, les projections algébriques sur les axes du moment linéaire d'une force égale et parallèle à P, mais dirigée en sens contraire et appliquée au point x_0, y_0, z_0 ; ce moment linéaire étant calculé pour le cas où l'on place le centre des moments à l'origine des coordonnées. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Si, en plaçant le centre des moments à l'origine des coordonnées, on construit : 1° le moment linéaire de la force P ; 2° le moment linéaire d'une force égale et parallèle, mais dirigée en sens contraire et appliquée au point x_0, y_0, z_0, le moment linéaire résultant transporté parallèlement à lui-même au point dont il s'agit, représentera en grandeur et en direction le moment linéaire de la force P par rapport à ce même point.*

» Nous dirons, avec M. Poinsot, que deux forces forment un couple lorsqu'elles sont égales et parallèles, mais en sens contraire, suivant deux droites différentes, et le moment de ce couple ou son moment linéaire sera ce que devient le moment ou le moment linéaire de l'une des forces, quand on prend le point d'application de l'autre pour centre des moments. Cela posé, le moment du couple sera évidemment égal au produit de l'une des forces par leur distance mutuelle, c'est-à-dire, en d'autres termes, à la surface du parallélogramme construit sur les deux forces; et le plan du moment du couple sera précisément le plan de ce parallélogramme, ou, si l'on veut, celui qui renferme les deux forces données. De plus le moment linéaire du couple élevé par le point d'application de l'une des forces se comptera

sur le demi-axe perpendiculaire au plan du couple, et autour duquel l'autre force tend à produire un mouvement de rotation de droite à gauche. Enfin, comme dans la proposition ci-dessus les points d'application des deux forces P et l'origine des coordonnées peuvent être des points quelconques de l'espace, il est clair que cette proposition se réduira simplement à celle que nous allons énoncer :

Théorème II. — *Lorsque deux forces forment un couple, le moment linéaire résultant pour le système de ces deux forces est égal et parallèle au moment du couple et dirigé dans le même sens, quel que soit le point de l'espace qu'on prenne pour centre des moments.*

« Revenons maintenant au système des forces P, P', P''..., appliquées à différents points de l'espace. Soient respectivement X, Y, Z, L, M, N, les sommes des projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires dans le cas où l'on place le centre des moments à l'origine des coordonnées. On aura

$$\begin{aligned} X &= P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \ldots, \\ Y &= P\cos\beta + P'\cos\beta' + \ldots, \\ Z &= P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \ldots, \\ L &= P(y\cos\gamma - z\cos)\beta + \ldots, \\ M &= P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + \ldots, \\ N &= P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + \ldots, \end{aligned}$$

cela posé, si par un point quelconque, on mène des forces P, P', P''..., égales et parallèles aux forces données, leur résultante, que je désignerai par R, aura pour valeur

(2) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

et formera avec les demi-axes des coordonnées positives des angles a, b, c, déterminés par les équations

(3 $$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

De plus, si, prenant le point dont il s'agit pour centre des

moments, on construit les moments linéaires des forces données, on pourra composer ces moments entre eux de manière à obtenir en définitive un moment linéaire résultant. Soit K ce dernier moment et désignons par l, m, n les angles que forme sa direction avec les demi-axes des coordonnées positives. Si le point pris pour centre des moments se confond avec l'origine des coordonnées, on aura évidemment.

$$(4) \qquad K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

$$(5) \qquad \cos l = \frac{L}{K}, \ \cos m = \frac{M}{K}, \ \cos n = \frac{N}{K},$$

puisque les projections algébriques du moment linéaire résultant devront être respectivement égales aux sommes des projections algébriques de tous les autres. Si le même point, supposé distinct de l'origine, avait pour coordonnées x_0, y_0, z_0, il faudrait, d'après ce qui a été dit ci-dessus, lui appliquer des forces égales et parallèles aux forces P, P', P''..., mais dirigées en sens contraire. En joignant ces nouvelles forces au système des forces données, et composant les uns avec les autres les moments linéaires de toutes les forces pris par rapport à l'origine, on formerait un moment linéaire résultant égal et parallèle à celui que l'on cherche et dirigé dans le même sens. Or les nouvelles forces étant égales et parallèles aux forces données, mais dirigées en sens contraire, leur résultante serait égale et directement opposée à la force R. Par suite les sommes des projections algébriques de leurs moments linéaires seraient respectivement égales aux projections algébriques du moment linéaire de la force R prises en signe contraire, c'est-à-dire à

$$R(z_0 \cos b - y_0 \cos c) = z_0 Y - y_0 Z,$$
$$R(x_0 \cos c - z_0 \cos a) = x_0 Z - z_0 X,$$
$$R(y_0 \cos a - x_0 \cos b) = y_0 X - x_0 Y.$$

Donc, si à ces trois dernières expressions on ajoute les quantités L, M, N, on trouvera pour sommes les projections algébriques

du moment linéaire représenté par K; donc en plaçant le centre des moments au point x_0, y_0, z_0, on aura

$$(6)\qquad \begin{aligned} K\cos l &= L - y_0 Z + z_0 Y,\\ K\cos m &= M - z_0 X + x_0 Z,\\ K\cos n &= N - x_0 Y + y_0 X. \end{aligned}$$

» Pour plus de commodité, la résultante R, à laquelle se réduit le système des forces P, P', P"..., lorsque toutes ces forces sont transportées parallèlement à elles-mêmes et appliquées au même point, sera nommée désormais la *force principale* du système. Le moment linéaire K, résultant de la composition des moments linéaires des forces données, sera de même appelé *moment linéaire principal*. Cela posé, il est clair que la direction et l'intensité du moment linéaire principal dépendront de la position du centre des moments, tandis que la direction et l'intensité de la force principale seront indépendantes de son point d'application. De plus quand on aura construit le moment linéaire principal relatif à l'origine des coordonnées, il suffira de le composer avec le moment linéaire de la force principale appliquée au point x_0, y_0, z_0, puis de transporter à ce dernier point le moment linéaire résultant, pour obtenir le moment linéaire principal relatif à ce même point. On en conclura, par une déduction géométrique facile, que la projection du moment linéaire principal sur la direction de la force principale est une quantité constante indépendante de la position du centre des moments. Cette proposition, due à M. Coriolis, peut être démontrée analytiquement de la manière suivante :

» Pour déterminer la projection du moment linéaire principal sur la direction de la force principale, il suffit de multiplier le moment lui-même par le cosinus de l'angle compris entre sa direction et celle de la force, et de prendre la valeur numérique du produit. Or le cosinus de l'angle compris entre les deux directions est équivalent à la somme

$$\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n,$$

laquelle en vertu des équations (3) et (8) se réduit à la fraction

$$\frac{LX+MY+NZ}{KR}.$$

Donc la projection cherchée sera équivalente à la valeur numérique de cette fraction multipliée par K, c'est-à-dire à

$$\pm\frac{LX+MY+NZ}{R}.$$

Cette dernière expression, ainsi qu'on devait s'y attendre, ne dépend pas des coordonnées du centre des moments, mais seulement des six quantités X, Y, Z, L, M, N, qui conservent les mêmes valeurs quelle que soit la position de ce centre.

» La projection du moment linéaire principal sur la direction de la force principale étant une quantité invariable, représente nécessairement la plus petite valeur que puisse admettre ce moment linéaire, ou, en d'autres termes, son *minimum*. Pour obtenir ce *minimum*, il faut évidemment placer le centre des moments dans une position telle, que la direction du moment linéaire principal devienne parallèle à celle de la force principale. Cette condition sera remplie si l'on a

$$\frac{\cos l}{\cos a}=\frac{\cos m}{\cos b}=\frac{\cos n}{\cos c}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{L-y_0Z+z_0Y}{X}=\frac{M-z_0X+x_0Z}{Y}=\frac{N-x_0Y+y_0X}{Z};$$

par conséquent, si l'on nomme ξ, η, ζ les coordonnées d'un point qui, pris pour centre des moments, remplisse la condition énoncée, on aura

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{L-\eta Z+\zeta Y}{X}=\frac{M-\zeta X+\xi Z}{Y}=\frac{N-\xi Y+\eta X}{Z}\\&=\frac{LX+MY+NZ}{R^2}.\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \begin{cases} L - \eta Z + \zeta Y = \frac{X}{R} \cdot \frac{LX + MY + NZ}{R}, \\ M - \zeta X + \xi Z = \frac{Y}{R} \cdot \frac{LX + MY + NZ}{R}, \\ N - \xi Y + \eta X = \frac{Z}{R} \cdot \frac{LX + MY + NZ}{R}. \end{cases}$$

Comme ces trois équations sont du premier degré relativement aux coordonnées ξ, η, ζ, et que la troisième équation se déduit immédiatement des deux autres, il est clair qu'elles appartiennent à une droite sur laquelle il suffira de placer le centre des moments pour que le moment linéaire principal devienne un *minimum*. Cette droite sera désignée désormais sous le nom d'*axe principal*.

» L'orsque le système des forces données se réduit à une seule, les six quantités X, Y, Z, L, M, N appartiennent à cette force unique; elles représentent les projections algébriques de cette force sur les axes et celles de son moment linéaire par rapport à l'origine. Dans la même hypothèse, on a nécessairement $LX + MY + NZ = 0$, et par suite les équations (10) se réduisent à

$$(11)\quad Z\eta - Y\zeta = L\,,\ X\xi - Z\xi = M\,,\ Y\xi - X\eta = N,$$

ou en substituant pour X, Y, Z, L, M, N leurs valeurs, et transformant, à

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y}{\cos 6} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma},$$

équations de la droite suivant laquelle agit la force donnée. Donc alors l'axe principal se confond avec cette droite.

» Lorsque le système des forces données se réduit à deux forces P, P', on a

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha',$$
$$Y = P\cos 6 + P'\cos 6',$$
$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma'.$$

transportées au même point, et le moment linéaire principal est la diagonale du parallélogramme construit sur les moments linéaires des deux forces données. Dans la même hypothèse, la force principale s'évanouit l'orsque les deux forces P, P' forment un couple, auquel cas on a nécessairement

$$(12)\quad \begin{cases} X=0,\ Y=0,\ Z=0,\ P'=P, \\ \cos\alpha'=-\cos\alpha, \cos\beta'=-\cos\beta, \cos\gamma'=-\cos\gamma \end{cases}$$

Dans ce cas, les projections algébriques (6) du moment linéaire principal deviennent indépendantes de la position du centre des moments; par suite le moment linéaire principal conserve toujours sa même valeur et n'admet plus de *minimum*, en sorte que l'axe principal disparaît entièrement. La valeur constante du moment linéaire principal est alors équivalente au moment du couple, c'est-à-dire au moment linéaire de l'une des forces quand on place le centre des moments sur la direction de l'autre force, ainsi que nous l'avons déjà expliqué...

» Soient A, A', A"..., des points, en nombre quelconque, liés entre eux invariablement. Ces points forment ce qu'on appelle un *système invariable*. Cela posé, cherchons les équations d'équilibre de plusieurs forces P, P', P"..., respectivement appliquées à ces mêmes points.

» Désignons encore par X, Y, Z, L, M, N les sommes des projections algébriques de ces forces et de leurs moments linéaires, le centre des moments étant toujours placé à l'origine des coordonnées. Si l'on suppose d'abord que le plan mené par les trois points A, A', A" ne renferme aucun des autres points donnés, chacune des forces P"', P^{IV}..., pourra être remplacée par trois composantes respectivement dirigées suivant les trois arêtes d'une pyramide qui aurait pour base le triangle A A' A", et le point d'application de chacune de ces composantes pourra être transporté à l'un des trois sommets du triangle dont il s'agit. Quand à l'aide de ces opérations on aura substitué au système des forces données celui de plusieurs forces appliquées aux trois sommets d'un triangle invariable, il sera nécessaire et il suffira pour l'équilibre que la force principale et le moment linéaire principal relatifs au

nouveau système s'évanouissent. Or cette force principale et le moment linéaire principal se trouvent représentés pour le premier système par les deux quantités

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Et comme, en passant du premier système au second, on ne change ni les sommes des projections algébriques des forces, c'est-à-dire les quantités X, Y, Z, ni les sommes des projections algébriques de leurs moments linéaires, c'est-à-dire les quantités L, M, N, il est clair que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre seront exprimées par les équations.

$$(1) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = o, \; L^2 + M^2 + N^2 = o,$$

auxquelles on peut substituer les suivantes :

$$(2) \quad X = o, \; Y = o, \; Z = o, \; L = o, \; M = o, \; N = o.$$

Si l'une des forces P''', P^{IV}..., avait son point d'application situé dans le plan du triangle AA' A'', il arriverait de deux choses l'une : ou bien cette force serait elle-même comprise dans le plan du triangle, et alors elle pourrait être remplacée par deux composantes appliquées à deux sommets de ce triangle, par exemple aux points A, A'; ou elle serait dirigée suivant une droite que percerait le plan, et pourrait être alors appliquée à un nouveau point de cette droite que l'on supposerait invariablement lié avec tous les points du système. Ce nouveau point étant situé hors du plan du triangle, toute difficulté disparaîtrait. Dans l'un et l'autre cas, on parviendra également aux conclusions que nous avons déjà obtenues. On arriverait aussi au même résultat en substituant au triangle AA'A'' un triangle quelconque dont les trois sommets seraient liés invariablement au système des points donnés.

» Donc, en définitive, pour que des forces quelconques appliquées aux différents points d'un système invariable se fassent équilibre, il est nécessaire et il suffit que la force principale et le moment linéaire principal s'évanouissent, ou, en d'autres termes, que les sommes des projections algébriques des forces

données et des projections algébriques de leurs moments linéaires se réduisent à zéro.

» Lorsque le système des forces données ne satisfait pas aux conditions d'équilibre, on peut à ce premier système de forces en joindre un autre choisi de manière que l'équilibre se trouve rétabli.

» Soient dans cette hypothèse

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ L_1,\ M_1,\ N_1,$$

ce que deviennent les quantités

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N,$$

lorsqu'on passe du premier système au second ; on aura nécessairement, puisque les deux systèmes se font équilibre,

$$(3)\qquad \begin{cases} X + X_1 = o,\ Y + Y_1 = o,\ Z + Z_1 = o, \\ L + L_1 = o,\ M + N_1 = o,\ N + N_1 = o, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\qquad \begin{cases} X_1 = -X,\ Y_1 = -Y,\ Z_1 = -Z, \\ L_1 = -L,\ M_1 = -M,\ N_1 = -N. \end{cases}$$

Réciproquement, si les équations qui précèdent subsistent, la réunion des deux systèmes produira l'équilibre.

» Donc, pour que deux systèmes de forces appliquées à des points liés invariablement les uns aux autres se fassent mutuellement équilibre, il est nécessaire et il suffit que dans le passage du premier système au second les sommes des projections algébriques des forces et des projections algébriques des moments linéaires conservent les mêmes valeurs numériques, mais changent de signe.

» Ce qui précède nous conduit immédiatement aux conditions d'équivalence de deux systèmes de forces à des points liés invariablement les uns aux autres.

» On dit en mécanique que deux systèmes de forces dont les points d'application se trouvent assujettis à des liaisons quelcon-

ques, sont *équivalents* lorsqu'un troisième système choisi de manière à faire équilibre au premier fait en même temps équilibre au second. Cela posé, si les points d'application ont été liés invariablement entre eux, il est clair que dans le passage du premier système au troisième, ou du second au troisième, les six quantités ci-dessus représentées par X, Y, Z, L, M, N devront conserver les mêmes valeurs numériques, mais changer de signe.

» En effet, représentons par

$$P,\ P',\ P''\ldots;\ P_1,\ P'_1,\ P''_1\ldots;\ P_2,\ P'_2,\ P''_2\ldots,$$
$$X,\ Y,\ Z\ldots;\ X_1,\ Y_1,\ Z_1\ldots;\ X_2,\ Y_2,\ Z_2\ldots,$$
$$L,\ M,\ N\ldots;\ L_1,\ M_1,\ N_1\ldots;\ L_2,\ M_2,\ N_2\ldots,$$

les forces des trois systèmes, les projections de leurs forces principales et de leurs moments linéaires principaux.

» Puisque le troisième système fait, par hypothèse, équilibre aux deux premiers, on aura

$$X + X_2 = 0,\ Y + Y_2 = 0,\ Z + Z_2 = 0,$$
$$X_1 + X_2 = 0,\ Y_1 + Y_2 = 0,\ Z_1 + Z_2 = 0,$$
$$L + L_2 = 0,\ M + M_2 = 0,\ N + N_2 = 0,$$
$$L_1 + L_2 = 0,\ M_1 + M_2 = 0,\ N_1 + N_2 = 0,$$

et par suite

$$X = X_1,\ Y = Y_1,\ Z = Z_1,\ L = L_1,\ M = M_1,\ N = N_1.$$

» Ainsi, pour que deux systèmes de forces appliquées à des points liés par des droites invariables soient équivalents, il est nécessaire et il suffit que, de part et d'autre, les projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires fournissent les mêmes sommes, ce qui revient à dire que ces deux systèmes doivent avoir la même force principale et le même moment linéaire principal.

» Il a été prouvé : 1° que les six quantités représentées par X, Y, Z, L, M, N, c'est-à-dire les projections algébriques sur les trois axes de la force principale et du moment linéaire principal, conservent les mêmes valeurs en changeant de signe, pour deux

systèmes de forces successivement appliqués à des points liés entre eux par des droites invariables, lorsque ces deux systèmes se font équilibre ; 2° que deux systèmes seront équivalents entre eux toutes les fois que les six quantités dont il s'agit ne varieront pas dans le passage de l'un à l'autre. On peut donc dire que ces six quantités étant données pour un système, son effet, relativement à l'équilibre, est complétement déterminé. On a vu d'ailleurs que, des six quantités X, Y, Z, L, M, N, on déduit immédiatement : 1° l'intensité de la force principale et du moment linéaire principal ; 2° les angles que les directions de cette force et de ce moment linéaire forment avec les demi-axes des coordonnées positives.

» Concevons maintenant que pour un système de forces appliquées à des points liés invariablement les uns aux autres, on connaisse les six quantités

$$X, Y, Z, L, M, N.$$

Pour que ce système soit réductible à une force unique, ou, en d'autres termes, pour qu'on puisse le remplacer par une force équivalente, il sera nécessaire et il suffira que les six quantités données soient propres à représenter les projections algébriques d'une seule force et de son moment linéaire. Par suite il sera nécessaire et il suffira que l'on ait en même temps

$$(5) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 > 0,$$
$$(6) \qquad LX + MY + NZ = 0.$$

» Ces conditions étant supposées remplies, la force équivalente au système donné sera ce qu'on nomme sa *résultante*, et cette résultante ne sera pas autre chose que la force principale appliquée à l'un des points de la droite dont les coordonnées ξ, η, ζ vérifient les trois équations

$$(7) \quad \eta Z - \zeta Y = L, \quad \zeta X - \xi Z = M, \quad \xi Y - \eta X = N.$$

Si l'on avait à la fois

$$X = 0, \ Y = 0, \ Z = 0,$$

l'équation (6) serait toujours vérifiée, mais l'inégalité (5) se trouverait remplacée par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Dans ce cas, le système donné sera évidemment réductible à deux forces égales et parallèles, mais dirigées en sens contraire, de manière à former un couple. En effet, pour obtenir un couple équivalent au système dont il s'agit, il suffira de choisir ce couple de telle sorte que son moment linéaire ait pour projection algébrique sur les axes les trois quantités

$$L, M, N.$$

» Pour y parvenir, on trace un demi-axe qui fasse avec ceux des coordonnées positives des angles dont les cosinus soient respectivement

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

On mènera par un point quelconque de l'espace un plan perpendiculaire à ce demi-axe, et par deux points pris arbitrairement dans ce plan deux parallèles quelconques. Enfin on divisera le radical $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ par la distance des deux parallèles, puis on portera sur elles, dans des sens opposés, deux forces égales représentées par ce quotient et dirigées de manière que chacune tende à faire tourner le plan de droite à gauche, soit autour du demi-axe primitivement construit, soit autour d'un demi-axe parallèle dont l'origine coïnciderait avec le point d'application de l'autre force. Il résulte de ces observations qu'après avoir obtenu un couple équivalent au système donné on pourra, sans changer l'effet de ce couple relativement à l'équilibre, transporter son plan parallèlement à lui-même partout où l'on voudra, et faire varier arbitrairement dans ce plan non-seule-

ment les points d'application des deux forces, mais encore les droites suivant lesquelles elles agissent. Ces droites étant supposées connues, on en déduira immédiatement l'intensité de chaque force. Il est bien entendu que les points d'application des deux forces du couple sont censés liés invariablement l'un à l'autre et à tous les points que l'on considère.

» Si pour le système de forces donné l'équation (6) cessait d'être vérifiée, on pourrait lui substituer la réunion de deux autres tellement choisis, que les sommes des projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires fussent respectivement :

» Pour le premier système,

$$X,\ Y,\ Z,\ o,\ o,\ o,$$

» Et pour le second,

$$o,\ o,\ o,\ L,\ M,\ N.$$

» Le premier des deux nouveaux systèmes pourrait être remplacé par la force principale appliquée à l'origine des coordonnées et le second par un couple. Par suite, cette force et ce couple réunis seraient équivalents au système donné. De plus, il serait permis de faire passer le plan du couple par l'origine, et même d'appliquer à cette origine une des forces du couple, en la supposant dirigée suivant une droite quelconque dans ce plan. Ajoutons que l'origine des coordonnées peut être transportée en un point quelconque de l'espace, d'où il suit que le système donné, quelles que soient les valeurs de X, Y, Z, L, M, N, pourra toujours être remplacé par la force principale appliquée à un point quelconque de l'espace et par un couple.

» On arriverait aux mêmes conclusions, en considérant ce système comme formé par la réunion de deux autres pour lesquels les sommes des projections algébriques des forces et de leurs moments linéaires seraient respectivement de la forme

$$X,\ Y,\ Z,\ y_0 Z - z_0 Y,\ z^0 X - x_0 Z,\ x_0 Y - y_0 X,$$
$$o,\ o,\ o,\ L - y_0 Z + z_0 Y,\ M - z_0 X + x_0 Z,$$
$$N - x^0 Y + y_0 X.$$

Le couple qui, joint à la force principale, peut remplacer un système donné, est ce que nous nommerons *le couple principal* de ce système. D'après ce qu'on vient de dire, ce couple principal dépend du point d'application de la force principale, et son moment linéaire est égal et parallèle au moment linéaire principal, quand on prend le point dont il s'agit pour centre des moments.

» Comme dans le cas où l'on applique au même point la force principale et une force du couple principal, rien n'empêche de composer ensuite ces deux forces entre elles ; il est clair qu'on pourra, si l'on veut, substituer au système donné, au lieu d'une force et d'un couple, un système composé de deux forces seulement.

» Nous terminerons en observant que l'équation (6) est satisfaite dans deux cas dignes de remarque, savoir : 1° quand les forces données sont parallèles à une même droite, par exemple à l'axe des z, puisque l'on a dans cette hypothèse

$$X = o,\ Y = o,\ Z = o;$$

2° quand elles sont comprises dans un même plan, par exemple dans le plan des xy, puisqu'on a dans ce cas

$$L = o,\ M = o,\ Z = o.$$

On en conclut que dans l'hypothèse le système donné peut être réduit soit à une force unique, soit à un couple unique de deux forces parallèles à l'axe des z ou comprises dans le plan des xy. Ajoutons que les quantités X, Y, Z, L, M, N ayant des valeurs quelconques, on pourra toujours décomposer le système qui leur correspond en deux autres tellement choisis, que ces mêmes quantités deviennent respectivement :

» Pour le premier système,

$$o,\ o,\ Z,\ L,\ M,\ o;$$

» Pour le second,

$$X,\ Y,\ o,\ o,\ o,\ N,$$

» Alors la force principale est la résultante des forces P, P' par conséquent en deux systèmes, dont l'un renferme seulement des forces parallèles à l'axe des z, et l'autre des forces comprises dans le plan des xy. »

L'auteur termine en disant que les diverses conséquences déduites de la théorie des moments linéaires, qui viennent d'être reproduites, ne diffèrent pas de celles auxquelles on parvient en suivant la théorie des couples. (Voir la *Statique* de Poinsot.)

Cette théorie, bien plus compliquée, plus savante que celle de Poinsot, ne vaut pas mieux au fond, en ce qu'elle concerne les couples et arrive à conclure qu'un système de forces invariablement liées entre elles peut toujours se réduire à une force principale appliquée à un point quelconque et à un couple.

Dois-je redire ici qu'il n'y a aucun système de corps, de molécules distinctes, qui soit absolument invariable, qui soit tel qu'aucune force appliquée ne puisse en faire varier la forme ; qu'un corps ou système qui serait néanmoins supposé absolument invariable, devrait être, à ce point de vue, dans l'impossibilité de tourner sur lui-même, et qu'un couple ne pourrait avoir aucune influence sur un tel corps ou système? A cet égard, il y a un vice radical dans l'une et l'autre théories.

Visiblement, d'après celle que je viens d'exposer, bien entendue, comme suivant l'autre, le couple qui, avec la force principale, représenterait toutes les forces d'un système, pourrait être dans un plan quelconque et avoir un sens et un axe quelconques. Or on ne peut admettre que néanmoins, comme ces theories l'entendent, les effets produits seraient semblables malgré ces variations ; sur ce point, je me réfère à ce que j'ai dit dans l'ouvrage qui précède en critiquant la doctrine de Poinsot. Sous ce rapport, ces deux théories doivent encore être rejetées.

Il est vrai que, selon celle que je critique maintenant, la projection du moment linéaire principal sur la direction de la force principale est une quantité constante indépendante de la position du centre des moments, et que le moment linéaire principal est égal au moment du couple principal ; mais il ne s'ensuit point que, quel que soit le centre des moments, les effets combinés de la force principale et du couple principal soient constamment

les mêmes. Ceci est complètement en dehors des motifs qui me font rejeter la doctrine.

D'ailleurs, les forces appliquées à un corps ou système régulier ou symétrique, pourraient être telles et tellement disposées, qu'il y aurait deux points symétriquement opposés que l'on pourrait prendre pour centres des moments et où, par l'application judicieuse de la théorie bien interprétée, l'on obtiendrait, avec la force principale, toujours invariable pour un système donné, un même couple, un couple exactement semblable, si ce n'est que celui obtenu à l'un des points serait de sens précisément contraire au sens du couple obtenu à l'autre point, les deux couples étant dans un même plan. Or il est de toute évidence que, dans ce cas, l'effet total produit par le choix d'un des points pour centre des moments devrait être exactement contraire à l'effet qu'on aurait en prenant l'autre point, même dans l'hypothèse où le système serait absolument invariable, si l'on supposait que néanmoins il peut tourner sur lui-même ; résultat qui montre l'irrationalité, l'absurdité de la théorie qui y conduit.

III

De l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur ou extérieur.

FORMULES GÉNÉRALES

On établit d'abord les formules générales de l'attraction d'un corps de forme quelconque de la manière suivante (1) :

« L'attraction exercée par un point M (x, y, z,) de masse dm sur un point O (α, β, γ,) dont la masse est μ (fig. 96) est égale à

$$\frac{f\mu\, dm}{u^2}$$

où f exprime la force d'attraction à l'unité de distance, et u la distance existant entre les deux points considérés.

» Les composantes de cette attraction élémentaire, parallèles aux axes de coordonnées, sont

$$\frac{f\mu(\alpha-x)}{u^3}\,dm,\ \frac{f\mu(\beta-y)}{u^3}\,dm,\ \frac{f\mu(\gamma-z)}{u^3}\,dm,$$

en regardant ces composantes comme positives quand elles tendent à diminuer les coordonnées du point attiré.

» Pour avoir les composantes A, B, C de l'attraction totale exercée par tous les points du corps attirant, il faudra intégrer les expressions précédentes dans toute l'étendue de ce corps. On aura ainsi

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= f\mu \iiint \frac{\alpha - x}{u^3}\,dm,\\ B &= f\mu \iiint \frac{\beta - y}{u^3}\,dm,\\ C &= f\mu \iiint \frac{\gamma - z}{u^3}\,dm. \end{aligned}\right.$$

(1) *Cours de Mécanique de l'École polytechnique*, par Sturn, t. 1, p. 84.

» Pour rendre l'intégration plus facile, transportons l'origine au point attiré et désignons par g, h, k les angles que la droite OM fait avec les axes de coordonnées. On a

$$\cos g = \frac{x-\alpha}{u},\ \cos h = \frac{y-\beta}{u},\ \cos k = \frac{z-\gamma}{u}.$$

Prenons en même temps des coordonnées polaires u, θ, ψ liées aux angles g, h, k par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos g = \cos\theta, \\ \cos h = \sin\theta\cos\psi, \\ \cos k = \sin\theta\sin\psi, \end{cases}$$

[ce qu'on voit en faisant u ou $r = 1$]. D'ailleurs on a

$$dm = -\rho u^2\, du \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

On aura donc

$$(3)\qquad \begin{cases} A = -f\mu \int\int\int \rho \cos g du \sin\theta\, d\theta\, d\psi, \\ B = -f\mu \int\int\int \rho \cos h du \sin\theta\, d\theta\, d\psi, \\ C = -f\mu \int\int\int \rho \cos k du \sin\theta\, d\theta\, d\psi. \end{cases}$$

» Si le point O est intérieur, il faut intégrer par rapport à u depuis $u = 0$ jusqu'à $u = R$, R désignant le rayon vecteur terminé à la surface du corps ; par rapport à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$; par rapport à ψ, depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$. »

Formules relatives à l'ellipsoïde.

Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur.

« Proposons-nous de trouver l'attraction de l'ellipsoïde

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

sur un point intérieur (α, β, γ).

» Pour avoir la valeur de R, il faut faire

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \alpha + u \cos g, \\ y = \beta + u \cos h, \\ z = \gamma + u \cos k, \end{cases}$$

dans l'équation (1), ce qui donne

$$(3)\qquad pu^2 = 2qu = l,$$

en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{\cos^2 g}{a^2} + \dfrac{\cos^2 h}{b^2} + \dfrac{\cos^2 k}{c^2}, \\[2ex] q = \dfrac{\alpha \cos g}{a^2} + \dfrac{\beta \cos h}{b^2} + \dfrac{\gamma \cos k}{c^2}, \\[2ex] l = 1 - \dfrac{\alpha^2}{a^2} - \dfrac{\beta^2}{b^2} - \dfrac{\gamma^2}{c^2}. \end{cases}$$

» On tire de l'équation (3)

$$u = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + pl}}{p}.$$

Comme p et l sont positives, on a deux valeurs de u, l'une positive qui est $\dfrac{-q + \sqrt{q^2 + pl}}{p}$, l'autre négative qu'il faut rejeter, car le rayon vecteur est une quantité positive, sa position étant déterminée par les angles g, h, k qui peuvent être aigus ou obtus. On prend donc

$$R = \frac{-q + \sqrt{q^2 + pl}}{p},$$

et l'on a, en intégrant par rapport à u, la première des formules (3) qui donnent les valeurs générales de A, B, C, et en omettant le facteur constant $f\mu\rho$,

$$A = -\int\int R \cos g . \sin\theta d\theta d\psi.$$

ou

$$(4) \qquad A = \int\int \frac{q - \sqrt{q^2 + pl}}{p} \cos g . \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

et de même

$$(5) \qquad B = \int\int \frac{q - \sqrt{q^2 + pl}}{p} \cos h . \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

$$(6) \qquad C = \int\int \frac{q - \sqrt{q^2 + pl}}{p} \cos k . \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

» On peut supprimer le radical $\sqrt{q^2 + pl}$ dans ces formules. Par exemple, la partie

$$\int\int \frac{\sqrt{g^2 + pl}}{q} \cos g . \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$

qui entre dans la formule (4) est nulle, car si l'on considère un élément de l'intégrale double correspondant à une certaine direction (θ, ψ) du rayon vecteur, puis l'élément correspondant à la direction opposée ($\pi - \theta$, $\pi + \psi$), cos g ou cos θ changera de signe sans changer de valeur en passant du premier élément au second et sin θ ne changera pas, de sorte que les deux éléments étant égaux et de signes contraires se détruisent. La valeur de A se réduit donc a

$$A = \int\int \frac{q}{p} \cos g . \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

ou, en remplaçant q par sa valeur précédemment donnée

$$\left\{ \begin{aligned} A = {} & \frac{\alpha}{a^2} \int\int \frac{\cos^2 g}{p} \sin\theta \, d\theta \, d\psi + \frac{6}{b^2} \int\int \frac{\cos g \cos h}{p} \\ & \qquad \sin\theta \, d\theta \, d\psi. \\ & + \frac{\gamma}{c^2} \int\int \frac{\cos g \cos k}{p} \sin\theta \, d\theta \, d\psi. \end{aligned} \right.$$

» En prenant deux éléments pour lesquels θ ait deux valeurs

supplémentaires tandis que ψ sera le même, ou, ce qui revient au même, deux éléments qui répondent à des valeurs supplémentaires de g et aux mêmes valeurs de h et de k, on voit que les deux dernières intégrales sont composées de parties qui se détruisent deux à deux, et A se réduit à la première intégrale. Une simplification analogue aura lieu dans les valeurs de B et de C. On aura donc

$$(7)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\alpha}{a^2}\displaystyle\iint \dfrac{\cos g}{p} \sin\theta d\theta d\psi, \\ B = \dfrac{6}{b^2}\displaystyle\iint \dfrac{\cos^2 h}{p} \sin\theta d\theta d\psi, \\ C = \dfrac{\gamma}{c^2}\displaystyle\iint \dfrac{\cos^2 k}{p} \sin\theta d\theta d\psi, \end{cases}$$

ou, en remplaçant p et $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$ par leurs valeurs précédemment données,

$$(8)\quad \begin{cases} A = \alpha \displaystyle\iint \dfrac{b^2c^2 \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi \sin^2\theta + a^2b^2 \sin^2\psi \sin^2\theta}, \\ B = 6 \displaystyle\iint \dfrac{a^2c^2 \sin^2\theta \cos^2\psi\, d\theta\, d\psi}{b^2c^2 \cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2 \sin^2\psi \sin^2\theta}, \\ C = \gamma \displaystyle\iint \dfrac{a^2b^2 \sin^2\theta \sin^2\psi\, d\theta\, d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2 \cos^2\psi \sin^2\theta + a^2b^2 \sin^2\psi \sin^2\theta}, \end{cases}$$

Conséquences des formules précédentes.

» Avant d'effectuer les intégrations, on peut déduire de ces formules plusieurs conséquences :

» 1° Tous les points situés dans un même plan perpendiculaire à un axe sont également attirés dans le sens de cet axe, et les composantes de l'attraction sont proportionnelles aux distances du point attiré aux trois plans principaux de l'ellipsoïde. Par conséquent, cette attraction reste parallèle à une même direction pour tous les points situés sur une ligne droite passant par le centre, et elle est proportionnelle à la distance du point attiré au centre.

2° On a

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}=\int\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi = 4\pi$$

et

$$\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d\beta}+\frac{dC}{d\gamma}=4\pi.$$

» 3° Les valeurs des composantes A, B, C ne renferment que les rapports des axes de l'ellipsoïde; elles restent donc les mêmes quand ces trois axes varient proportionnellement, c'est-à-dire deviennent na, nb, nc. Donc une couche homogène comprise entre deux surfaces ellipsoïdales concentriques, semblables et semblablement placées (homothétiques), n'a aucune action sur un point placé dans l'espace vide intérieur, et par conséquent l'action d'un ellipsoïde sur un point de sa propre masse se réduit à celle de la partie de ce corps qui est terminée par une surface concentrique et semblable à la sienne et passant par le point donné.

» Maintenant, passant à l'intégration, on raisonne ainsi :

» Comme la fonction sous les signes $\int\int$ dans les formules (8) a la même valeur pour deux valeurs de θ supplémentaires et pour des valeurs de ψ telles que φ, $\pi-\varphi$, $\pi+\varphi$, $2\pi-\varphi$, il suffira d'intégrer par rapport à θ de zéro à $\frac{\pi}{2}$ puis de doubler le résultat, et par rapport à ψ de zéro à $\frac{\pi}{2}$ en quadruplant le résultat. Occupons-nous d'abord de la valeur de A. En mettant les limites en évidence, on aura

$$A=8b^2c^2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta+a^2b^2\sin^2\psi\sin^2\theta}.$$

Posant $\qquad \tan\psi = t,$

d'où $\quad d\psi = \frac{dt}{1+t^2}, \ \sin^2\psi = \frac{t^2}{1+t^2}, \ \cos^2\psi = \frac{1}{1+t^2};$

on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{b^2 c^2 \cos^2\theta + \ldots}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{c^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) + b^2(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)t^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi}{bc\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}}$$

à cause de la formule

$$\int \frac{dt}{m+nt^2} = \frac{1}{\sqrt{mn}} \operatorname{arc\,tang}\left(t\sqrt{\frac{n}{m}}\right);$$

donc

$$A = 4\pi\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{bc\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}}$$

Sans nouveau calcul, on déduira B et C de A par de simples permutations. On aura donc

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} A &= 4\pi\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{bc\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin\theta)}}. \\ B &= 4\pi 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ac\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}}. \\ C &= 4\pi\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)}}. \end{aligned}\right.$$

» Ces composantes étant positives, tendent à rapprocher le point O du centre de l'ellipsoïde. Elles ne renferment que les rapports des axes, de sorte qu'en remplaçant a, b, c par na, nb, nc, elles restent les mêmes. Ainsi *l'ellipsoïde étant augmenté d'une partie comprise entre sa surface semblable, l'action de la couche ajoutée sur le point intérieur est nulle.*

Théorème de Newton.

» On peut démontrer sinthétiquement ce théorème de Newton qu'*une couche homogène d'une épaisseur quelconque comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées n'exerce aucune action sur un point intérieur.*

» Concevons un cône infiniment étroit ayant son sommet au point attiré O (fig. 97). Il intercepte dans la couche deux portions de volumes v, v' qu'on peut décomposer en tranches ou troncs de cônes par des plans perpendiculaires à l'arête qq'. La masse de la tranche mn, située à la distance $Om = u$ du point O est $\rho\sigma du$, σ étant la section mn : mais $\sigma = \omega u^2$, en nommant ω la section faite dans le cône à une distance du point O égale à l'unité. L'attraction de cette tranche sur le point O est

$$f\mu\rho \frac{\sigma du}{u^2} \text{ ou } f\mu\rho\omega du.$$

» En intégrant par rapport à u depuis $u = Op$ jusqu'à $u = Oq$, ρ et ω étant des constantes, on voit que l'action de v est égale à $f\mu\rho\omega\,(Oq - Op)$ ou $f\mu\rho\omega.\,pq$. De même l'action de v' est $f\mu\rho\omega.p'q'$ Ces deux forces agissent en sens contraires et se détruisent, car $pq = p'q'$, puisque dans deux ellipsoïdes semblables les cordes parallèles à une même direction ont leurs milieux sur un même plan diamétral. Donc les actions exercées sur le point O par les divers éléments de la couche peuvent se décomposer en actions deux à deux égales et contraires ; donc elles se détruisent.

» Ce théorème est vrai pour une couche infiniment mince, et par conséquent, pour une couche d'épaisseur finie, telle qu'on puisse la considérer comme composée de couches infiniment minces, comprises entre des surfaces ellipsoïdales concentriques, sem-

blables et semblablement placées, la densité ne variant que d'une couche à une autre.

» Si le point O était intérieur, les deux actions exercées par les portions v, et v' seraient encore égales, mais elles s'ajouteraient.

Cas d'un point extérieur. Théorème d'Yvory.

» En conservant les mêmes notations on a

$$A = \int\int\int \cos g\, du \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

» Ici on doit intégrer depuis $u = R$ jusqu'à $u = R'$, R et R' désignant les distances du point attiré aux deux points où la droite déterminée par les angles θ et ψ rencontre la surface de l'ellipsoïde. On a donc

$$A = \int\int (R' - R) \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

ou bien (voir plus haut)

$$A = 2 \int\int \frac{\sqrt{q^2 + pl}}{p} \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Il faudrait intégrer cette expression entre les limites qui correspondent à $R' - R = 0$, c'est-à-dire pour toutes les directions qui tombent dans l'intérieur du cône circonscrit. Mais on ramène ce cas à celui du point intérieur par le théorème d'Yvory.

» Concevons deux ellipsoïdes ayant leurs axes a, b, c et a', b', c', dirigés suivant les trois mêmes axes rectangulaires. On appelle points *correspondants* deux points dont les coordonnées sont proportionnelles aux demi-axes auxquels elles sont parallèles, c'est-à-dire que (x, y, z) et $(x'\ y'\ z')$ étant deux points correspondants, on aura

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}.$$

» Si l'un de ces points est sur la surface du premier ellipsoïde, l'autre sera évidemment sur la surface du second.

» Supposons, en outre, que les sections principales de ces deux ellipsoïdes aient les mêmes foyers, c'est-à-dire que

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2.$$

« *Si l'on prend sur les deux ellipsoïdes* (fig. 98) *deux points quelconques* $m\,(x,\ y,\ z)$, $\mu\,(\alpha,\ 6,\ \gamma)$ *et leurs correspondants* $m'\,(x',\ y',\ z')$, $\mu'\,(\alpha',\ 6',\ \gamma')$, *les distances* $\mu\, m$ *et* $\mu' m'$ *sont égales.*

» En effet, on a

$$\begin{aligned} &\mu m^2 - \mu' m'^2 \\ &= (\alpha - x)^2 + (6 - y)^2 + (\gamma - z)^2 - (\alpha' - x')^2 \\ &\qquad - (6' - y')^2 - (\gamma' - z')^2 \\ &= \left[\frac{a'}{a}\alpha' - x\right]^2 + \left[\frac{b'}{b}\,6' - y\right]^2 + \left[\frac{c'}{c}\gamma' - z\right]^2 \\ &\qquad - \left[\alpha' - \frac{a'}{a}x\right]^2 - \dots \\ &= \left[\frac{\alpha'^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right](a'^2 - a^2) + \left[\frac{6'^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}\right](b'^2 - b^2) \\ &\qquad + \left[\frac{\gamma'^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2}\right](c'^2 - c^2), \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mu m^2 - \mu' m'^2 = (a'^2 - a^2)\Big[&\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{6'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2} \\ &- \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\Big]. \end{aligned}$$

Mais ce dernier facteur est nul, puisque l'on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\quad \frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{6'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2} = 1,$$

donc

$$\mu m = \mu' m'.$$

» Appelons toujours A, B, C les composantes de l'attraction du premier ellipsoïde sur le point μ. On a, en faisant abstraction du facteur $f\mu\rho$,

$$A = \int\int\int \frac{\alpha - x}{u^3}\, dx\, dy\, dz.$$

On a, en regardant x comme seule variable,

$$u\,du = -(\alpha - x)\, dx,$$

d'où

$$\int \frac{\alpha - x}{u^3}\, dx = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u};$$

donc si l'on désigne par R et r les valeurs de u qui correspondent aux limites de l'intégrale, c'est-à-dire aux deux points où la surface de l'ellipsoïde est rencontrée par une même parallèle à l'axe des x, on aura

$$A = \int\int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) dy\, dz.$$

Considérons maintenant l'attraction que le second ellipsoïde exerce sur le point μ' correspondant de μ, et nommons A', B', C' ses composantes, on aura

$$A' = \int\int \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{R'}\right) dy'\, dz'.$$

Mais $r = \mu m$, $r' = \mu' m'$, donc $r' = r$: de même $R' = R$. D'ailleurs $dy' = \frac{b'}{b}\, dy$, $dz' = \frac{c'}{c}\, dz$. Donc

$$A' = \int\int \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] \frac{b'c'}{bc}\, dy\, dz = \frac{b'c'}{bc} \int\int \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] dy\, dz$$

ou

$$A' = \frac{b'c'}{bc} A.$$

On aura de même

$$B' = \frac{a'c'}{ac} B, \quad C' = \frac{a'b'}{ab} C.$$

» Donc l'*attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur* μ *est ramenée à l'attraction d'un ellipsoïde homofocal sur le point* μ' *correspondant.*

» Ce théorème subsiste quelle que soit la loi d'attraction.

» Pour faire usage de ce théorème, il faut calculer les valeurs des demi-axes a', b', c' du second ellipsoïde, connaissant ceux du premier et les coordonnées α, β, γ du point μ. On a

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2} = 1;$$

$$b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2 = h,$$
$$c'^2 - a'^2 = c^2 - a^2 = k,$$

d'où

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{a'^2 + h} + \frac{\gamma^2}{a'^2 + k} = 1.$$

» Cette équation donne une valeur positive pour a'^2 et une seule, car $a'^2 = o$ rend le premier membre plus grand que l'unité et $a'^2 = \infty$ le rend moindre que l'unité. D'ailleurs ce premier membre décroît d'une manière continue quand a' varie depuis zéro jusqu'à l'infini. Il ne peut donc passer qu'une seule fois par la valeur de 1. Le demi-axe a' étant déterminé, on aura les deux autres par les équations

$$b'^2 = a'^2 + h, \quad c'^2 = a'^2 + k. »$$

Précédemment, dans le cours de ce livre, j'ai dit que ces analyses pèchent, qu'elles présentent des irrationalités analogues à celles que j'ai signalées dans l'analyse ayant pour objet l'attraction d'une sphère sur un point intérieur ou extérieur.

Dans les deux cas, en effet, un corps est conçu, du moins par ceux qui admettent l'infiniment petit, comme composé d'une infinité d'éléments infiniment petits : conception contraire à la raison.

Dans ces analyses, on n'a pas égard à la distance qui peut exister entre les points matériels ou molécules composant un corps; elles ne pourraient donc s'appliquer qu'à une sphère ou un ellipsoïde absolument continus, n'offrant absolument aucun espace vide. Comme je l'ai observé au sujet de l'attraction d'une sphère, on n'efface pas ce vice radical en représentant la densité moléculaire par le signe ρ dans les équations.

Dans ces mêmes spéculations on a le tort de supposer des rapports de quantité entre des droites et des courbes essentiellement différentes. On le fait, par exemple, en regardant une sphère, ou un ellipsoïde comme composés de petits cubes; on le fait encore, notamment, dans l'analyse concernant l'ellipsoïde, quand on y pose l'équation

$$\int \frac{dt}{m+nt} = \frac{1}{\sqrt{mn}} \text{arc tang} \left[t \sqrt{\frac{n}{m}} \right].$$

D'ailleurs, l'expression de la forme $r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\psi$ qui, dans ces calculs, est considérée comme représentant l'élément de volume, n'a point été obtenue rationnellement, bien qu'on arrive à ce même résultat par deux voies, celle des infiniment petits et celle dite des limites.

Voici le procédé relatif à la méthode des limites, tel qu'il est présenté dans le même traité, t. 1, p. 73 :

« Soit M (r, θ, ψ) (fig. 99) un point pris dans le corps considéré. Décrivons dans le plan M O x et du point O comme centre deux arcs de cercle MI et LK, avec les rayons OM $= r$ et OL $= r + \Delta r$, terminés à la droite OK telle que LOK $= \Delta\theta$.

» Si l'on imagine que le quadrilatère plan IMLK tourne au-

tour de Ox d'un angle $\Delta\psi$ et vienne en I'M'L'K', nous obtiendrons un petit solide MK' que nous prendrons pour l'élément du volume total. D'après le théorème de Guldin, MK' aura pour mesure l'aire IMLK multipliée par l'arc de cercle que décrit le centre de gravité de cette aire. Or

$$\text{IMLK} = \text{OKL} - \text{OMI} = \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\theta - \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\theta,$$

ou bien

$$\text{IMLK} = (r + \tfrac{1}{2}\Delta r)\Delta r \Delta\theta.$$

D'un autre côté, si u est la perpendiculaire GH abaissée du point G sur l'axe Ox, l'arc décrit par le point G sera égal à $u\Delta\psi$. Mais le point G, étant compris dans l'intérieur du quadrilatère IKLM, peut devenir aussi voisin que l'on voudra du point M, en prenant $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$ assez petits. Par conséquent, GH différera peu de la perpendiculaire $MQ = r \sin\theta$ abaissée du point M sur l'axe Ox : on aura donc

$$(1) \qquad u = r\sin\theta + \alpha,$$

α désignant une quantité qui tend vers o en même temps que Δr et $\Delta\theta$; et par suite

$$(2) \qquad \Delta V = (r\sin\theta + \alpha)(r\tfrac{1}{2} + \Delta r)\, \Delta r\, \Delta\theta\, \Delta\psi.$$

» Mais si l'on appelle ρ la densité du solide au point M, $\rho + 6$ sera la densité moyenne de l'élément de volume ΔV, 6 devenant nul à la limite. En appelant ΔP le poids de cet élément, on aura donc

$$\Delta P = (\rho + 6)\Delta V,$$

et par suite,

$$(3) \qquad \Delta P = (\rho + 6)(r\sin\theta + \alpha)(r + \tfrac{1}{2}\Delta r\, \Delta\theta\Delta\psi.$$

De là on conclut

$$P = \Sigma\rho r^2 \sin\theta\, \Delta r \Delta\theta\, \Delta\psi + \Sigma\gamma\Delta r\, \Delta\theta\Delta\psi.$$

Or, si l'on suppose les accroissements Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ de plus en plus petits, on a

$$\lim \Sigma\rho r^2 \sin\theta\, \Delta r\, \Delta\theta\, \Delta\psi = o,$$

$$\lim \Sigma \rho r^2 \sin\theta \Delta r \Delta\theta \Delta\psi = \int\int\int \rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Donc

$$(4) \qquad P = \int\int\int \rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

« Quand le corps est homogène, ρ est une constante qu'on peut faire sortir du signe d'intégration, et si l'on observe que $\frac{P}{\rho}$ est égal au volume V du corps, on aura

$$(5) \qquad V = \int\int\int r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi. »$$

Cette analyse n'est point rationnelle, car, encore ici, on suppose des rapports de quantité entre des courbes différentes et entre des courbes et des droites. On le fait, notamment, en appliquant le théorème de Guldin qui est faux à ce point de vue.

La différentielle en question, $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi$, étant ici égale à zéro, ne saurait être un élément réel d'un corps; il faudrait la regarder seulement comme la limite de tous les petits solides MK' que l'on admet et que l'on suppose de plus en plus petits dans cette spéculation; mais ces petits solides seraient variables de forme, ils présenteraient à leur surface des courbes essentiellement différentes : il ne pourrait donc y avoir entre eux aucun rapport de quantité, de degrés; la formule trouvée pour dV ne saurait donc être rationnellement regardée comme leur limite, en ce sens qu'une intégrale définie de cette même formule pût donner le volume d'un corps. C'est là une des fausses applications de la méthode des limites.

Quant à la détermination par la méthode des infiniment petits, de l'expression du volume de l'élément d'un corps, vicieuse par cette méthode, elle l'est aussi en ce qu'elle suppose des rapports de quantité entre des grandeurs essentiellement différentes.

L'analyse concernant l'attraction d'un corps sphérique homogène, qu'on a fondée sur les équations générales de l'attraction d'un corps de forme quelconque, pèche sous les mêmes rapports que celle ayant le même objet, que j'ai présentée dans le cours de ce livre.

IV.

De l'infini.

Dans mon introduction, à propos du calcul infinitésimal, j'ai discuté et nié la possibilité d'un infini quelconque, de l'infiniment petit comme de l'infiniment grand. Je crois intéressant de revenir spécialement sur ce point dans cette note.

Je trouve, à ce sujet, dans les *Mondes* du 6 décembre 1869, une lettre adressée à M. l'abbé Moigno, rédacteur de cette revue, par M. Méhay. Je vais la reproduire avec la réponse de M. Moigno, imprimée dans le numéro suivant des *Mondes*.

Lettre de M. Méhay :

« Vous savez, d'après le mémoire que j'ai présenté à l'Académie, le 25 octobre dernier, et que je vous ai envoyé en même temps, que je partage complètement les idées de Cauchy et les vôtres, au point de vue mathématique, en ce qui concerne l'infini, mais il me semble que les conséquences que vous en tirez sont un peu forcées. Vous dites : « Le nombre actuellement infini est impossible, donc le nombre des révolutions de la terre est fini, et il y a eu une première révolution, et la terre n'a pas éternellement tourné autour du soleil. Donc aussi le nombre des hommes et des êtres de chaque genre qui se sont succédé sur la terre est nécessairement fini, et il y a un nombre fini de types ou premiers êtres sans prédécesseurs, et les êtres ne se sont pas éternellement succédé sur la terre. » Permettez-moi de vous faire remarquer que vous pourriez dire avec autant de raison : Le nombre actuellement infini est impossible, donc l'étendue a des dimensions finies et l'univers a des bornes, ce qui me paraît démontrer l'erreur de votre raisonnement, car, si vous supposez un instant des bornes à l'univers, la pensée les franchit immédiatement.

» De ce qu'il n'y a pas de quantité infinie ayant une existence réelle, on ne peut certainement pas en conclure que l'idée représentée par le mot infini n'existe pas en nous; cette idée, dont la réalité subjective ne peut être contestée, nous vient, en effet,

naturellement de la conception de toute opération que nous pouvons répéter un nombre de fois aussi grand qu'il nous convient de l'imaginer, sans entrevoir d'obstacle qui puisse nous empêcher de continuer la même série d'opérations. Si donc l'on considère la terre comme tournant autour du soleil, en vertu des seules lois physiques établies, l'on raisonnera juste en disant que le nombre des révolutions doit être considéré comme infini dans le passé comme dans l'avenir, car l'on entendra par là qu'en se reportant à des temps aussi éloignés du moment présent qu'on peut se l'imaginer, il n'y aura pas plus de raison qu'actuellement pour que la terre commence son mouvement ou pour qu'elle cesse de tourner; l'on dira de même avec raison que les dimensions de l'étendue sont infinies, parce qu'après s'être transporté, par la pensée, aux plus grandes distances que nous puissions concevoir, nous pouvons encore supposer cette opération répétée sans obstacle. Je trouve, pour mon compte, que le mot infini est ainsi employé dans sa véritable acception, et que cela n'empêche pas d'admettre avec Cauchy et avec vous que l'idée qu'il représente n'est pas celle d'une quantité réellement existante.

» J'admets de même que vous raisonnez juste au point de vue où vous vous placez, en disant que le nombre des révolutions de la terre est fini; quant à l'action provenant des lois physiques, vous admettez un obstacle qui est la volonté de Dieu, mais là est toute la différence entre les deux opinions, et, dans les considérations mathématiques sur le fini et l'infini, je ne vois absolument rien qui puisse être plus particulièrement favorable à l'une ou à l'autre.

» Dans le mémoire que je vous ai adressé, j'ai essayé de démontrer que l'idée de l'infiniment petit ne peut se traduire par une quantité réelle non plus que celle de l'infini, et je ferai remarquer ici que cette vérité devient évidente si l'on se reporte à l'idée que représente ce mot infiniment petit; cette idée nous vient, en effet, de ce qu'ayant divisé une quantité déterminée en un certain nombre de parties, nous pouvons concevoir cette opération comme se trouvant répétée autant de fois qu'il nous convient de l'imaginer sans rencontrer d'obstacle s'opposant à la continuation du partage dans les mêmes conditions, en sorte que, par le fait, cette série d'opérations n'a pas de fin, et par

conséquent pas de résultat numérique final ; or, comme c'est précisément ce résultat final que l'on convient de nommer infiniment petit, cette idée ne peut représenter une quantité numérique réelle, mais cela ne l'empêche en aucune manière d'être acceptée comme produit de notre imagination, de même que l'idée de l'infini. »

Réponse de M. Moigno :

« M. Méhay ne m'a pas bien compris. Les unités dont je parle, la révolution de la terre autour du soleil, les générations d'êtres, sont des unités actuelles et non pas des unités virtuelles, résultat d'une opération de mon esprit. Leur succession forme donc un nombre réel, qui doit avoir toutes les propriétés essentielles des nombres, qui doit être fini et limité avec un commencement ou unité première. Si ce nombre n'avait pas eu de commencement, l'ensemble des êtres successifs serait rigoureusement infini, et l'infini existerait réellement, ce que M. Méhay n'admet pas. M. Méhay affirme que mon raisonnement conduit à admettre que l'espace est fini, ce qui n'est pas, dit-il. Il se trompe évidemment, en ne distinguant pas l'espace réel, ensemble de tous les corps de la nature considérés comme coexistants, de l'étendue indéfinie qui n'a de réalité que dans notre imagination. Celle-ci, par là-même, peut être infiniment grande, tandis que le nombre des corps de la nature est nécessairement fini. En résumé, M. Méhay confond l'infini avec l'indéfini ; l'indéfiniment grand et l'indéfiniment petit avec l'infiniment grand et l'infiniment petit ; l'éternité antérieure (*à parte ante*) des êtres successifs, qui supposerait un nombre réellement infini, avec l'éternité consécutive (*à parte post*); qui n'entraîne qu'un nombre toujours fini quoique indéfiniment grand.

» F. MOIGNO. »

M. Moigno a certainement raison d'affirmer qu'il ne saurait y avoir réellement, actuellement, un nombre infini d'êtres, qu'une succession infinie, actuellement accomplie de générations d'êtres est absolument impossible. Il y a longtemps que j'ai reconnu cette impossibilité dans l'exposé de mon système philosophique (1).

(1) 1 vol. in 8°, chez Penaud et Jolly, libraires, rue Visconti, 22, à Paris.

Non-seulement j'ai rejeté l'infinité réalisée, effectuée, de générations, d'une succession de phénomènes, en considérant cette infinité en soi, mais j'ai montré que si on l'admettait, il faudrait admettre aussi qu'il n'y a aucune cause déterminante de l'époque à laquelle se produit chaque phénomène.

« Ma raison, ai-je dit (p. 143 de l'exposé de mon système), repousse tout d'abord la possibilité d'un nombre infini... Ainsi il n'y a point une infinité d'êtres.

» Ma raison repousse un infini accompli dans la succession (p. 95 du même livre).

» En admettant des changements (p. 81 du même ouvrage), il faudrait supposer, ou bien qu'il y aurait eu un premier changement, ou bien qu'il y aurait eu de toute éternité quelque changement.

» La première hypothèse est évidemment inadmissible : il est bien visible que si tous les êtres possibles sont restés une éternité sans éprouver la moindre modification, ils ont dû et devront continuer à ne changer sous aucun rapport; car il n'a existé, il n'existera jamais aucune cause de changement pour eux.

» Dans la seconde hypothèse, on ne pourrait échapper à l'impossibilité de la première qu'en supposant une succession infinie d'états résultant les uns des autres, de telle sorte que chacun de ces états serait cause et effet qu'il n'y en aurait aucun existant par lui-même; or, ce serait tomber dans une autre impossibilité: la raison n'accepte point cette succession infinie d'états dont aucun ne serait par lui-même, elle demanderait une cause première, une cause non produite.

» D'ailleurs, dans cette même hypothèse, il ne pourrait y avoir une époque nécessaire pour aucun des changements effectués. Si, en effet, un changement a eu lieu à telle époque, à tel instant, pourquoi n'a-t-il pas eu lieu un ou plusieurs instants, dix mille ans, cent mille ans, etc., plus tôt ou plus tard? On répondra qu'un changement ne peut avoir lieu qu'après avoir été précédé de certaines autres modifications nécessaires pour amener l'influence, la cause qui doit le produire, et que, cette cause une fois arrivée, le changement est nécessaire; qu'ainsi son époque est nécessaire. Mais cette réponse n'est pas acceptable. A quelque époque que la pensée place un changement, on voit qu'un

temps infini serait alors écoulé. Or, une durée infinie que l'on supposerait écoulée à une époque passée quelconque, il y a dix mille ans, cent mille ans, etc., ne serait pas moins longue qu'une durée infinie que l'on supposerait devoir être écoulée à un temps futur, dans dix mille ans, cent mille ans et plus. Dans tous les cas, les phénomènes qui devraient précéder chaque changement auraient un temps infini, un temps égal, pour se produire dans l'ordre nécessaire : il faudrait donc admettre qu'un changement, quel qu'il fût, eut pû arriver à une époque autre que celle où il est arrivé. Or, cela n'est point admissible; chaque changement devrait avoir une époque nécessaire. L'hypothèse dont il s'agit est donc fausse comme la première... »

Non-seulement j'ai rejeté et rejette encore l'hypothèse d'une infinité d'êtres, de phénomènes, de générations, mais encore j'ai repoussé et repousse toute infinité. Ainsi j'ai dit, p. 149 : « Il ne peut y avoir une étendue infinie ; certes il n'existe pas un corps, un objet qui soit infini en étendue : pour voir qu'une telle qualité est chimérique, il me suffit de l'envisager en soi. » ; p. 151, « Il m'est évident qu'une durée infinie ne peut être écoulée, accomplie: envisagé en soi, indépendamment de toute considération, je vois qu'un temps infini passé est impossible. »

J'affirme donc que la matière, supposée existante, n'a pu être pendant un temps infini, même sans changement dans son état. M. Moigno va-t-il jusque-là ? Si oui, il aurait donc le courage de faire commencer la matière, la substance même du monde; c'est-à-dire que, pour échapper à une impossibilité rationnelle, il se jetterait dans une autre impossibilité rationnelle non moins flagrante ?

Pour moi, j'ai résolu ce terrible problème par la seule solution rationnelle possible: la négation de la matière, du monde phénoménal, des changements réels, de la succession, de la durée, du temps. Nous avons idée de tout cela, mais tout cela n'est pas réellement. Nous sommes des substances sans étendue, sans durée, sans succession, sans changement, qui ont idée d'objets se succédant, changeant, agissant, bien que ces objets et ces phénomènes n'aient aucune réalité.

Ce ne sont pas seulement les impossibilités signalées plus

haut à propos de l'infini, qui forcent d'admettre cette conclusion : la raison pure y conduit par d'autres voies que montre l'exposé complet de mon système philosophique.

Demandez à M. l'abbé Moigno s'il nie tout infini : il répondra certainement qu'il admet l'infinité divine ; et pourtant cet infini choque ma raison tout aussi énergiquement que l'hypothèse d'une infinité d'êtres réels, d'une succession infinie actuellement écoulée de moments, de phénomènes, de générations, etc. J'ai d'ailleurs montré, dans le même livre, que les attributs infinis de Dieu, impossibles en eux-mêmes, se heurtent les uns contre les autres, sont incompatibles entre eux.

M. Moigno croit bien que le nombre des corps de la nature est nécessairement fini. Très-bien, mais les corps ne sont pas l'espace dans lequel ils paraissent se mouvoir. Pense-t-il que cet espace est borné ? S'il le pensait, il admettrait donc qu'il est quelque ligne ou finit l'espace et que, dans leurs mouvements, les corps ne pourraient pas dépasser ? Sa raison sans doute protesterait contre une telle hypothèse ; elle lui dirait, à ce point de vue, que si les corps se meuvent, l'espace dans lequel ils se meuvent et qu'ils peuvent parcourir n'a pas de fin. L'espace serait donc un infini réel. Vainement dirait-il que l'espace en lui-même n'est rien. Ou il est ou il n'est pas : il n'y a pas de milieu entre l'existence et la non-existence. Si l'espace n'est pas, le mouvement est impossible, car le mouvement implique le passage d'un corps d'un lieu dans un autre; il implique que le corps est dans un espace pénétrable, où il occupe successivement divers lieux. Si au contraire l'espace est réel, si cette étendue pénétrable où se mouvraient les corps existe, elle est infinie, puisque les corps peuvent s'y mouvoir sans lui trouver aucune fin.

Dira-t-on qu'en effet il y a un espace, une étendue pénétrable qui n'a pas de fin, mais qu'il ne peut y avoir une infinité de corps distincts dans cet espace ? Bien vaine serait cette distinction. Evidemment, s'il pouvait y avoir un espace pénétrable infini en étendue, on pourrait bien admettre l'existence d'un corps d'une étendue infinie, ou celle d'une infinité de corps d'une étendue finie quelconque, distants ou non distants

les uns des autres, en repos ou en mouvement dans l'espace infini.

La raison rejette tout d'abord l'hypothèse d'un espace réel qui serait pénétrable par un corps; mais, d'un autre côté, elle dit que, sans cet espace pénétrable, il n'est pas de mouvement possible. La conséquence rationnelle à en tirer, c'est qu'il n'y a pas de mouvement. A plusieurs points de vue, d'ailleurs, j'ai montré l'idéalité des corps, de la matière, dans le livre cité.

En soi un être réel n'est ni borné ni infini. Les corps supposés réels n'auraient pas vraiment la qualité d'être bornés, finis, considérés en eux-mêmes. Ce n'est que relativement à l'espace supposé infini qu'on les conçoit comme finis. D'ailleurs les êtres réels, étant sans étendue, sans durée, étant purement spirituels, n'offrent aucune qualité susceptible d'être mesurée, ne présentent aucun degré, aucune quantité substantielle.

L'on attribue souvent des degrés à des choses qui ne sauraient en avoir réellement. Ainsi, par exemple, on conçoit des jouissances ou des souffrances comme plus ou moins grandes, plus ou moins vives, et pourtant elles n'ont vraiment entre elles aucun rapport de degré, de quantité ; elles n'ont même pas un tel rapport, dans le sens de celui que l'on trouve, que l'on conçoit entre des étendues, des durées, des qualités quelconques d'une même nature. Des jouissances ou des souffrances qui ne sont pas exactement semblables, étant essentiellement différentes, ne peuvent avoir aucun rapport de quantité ou de degré entre elles. Il en est ainsi des mérites, des démérites : ils ne sauraient se mesurer réellement. Il n'y a donc point lieu de se demander si des qualités de ce genre, si des jouissances ou des souffrances, des mérites ou des démérites peuvent être infinis.

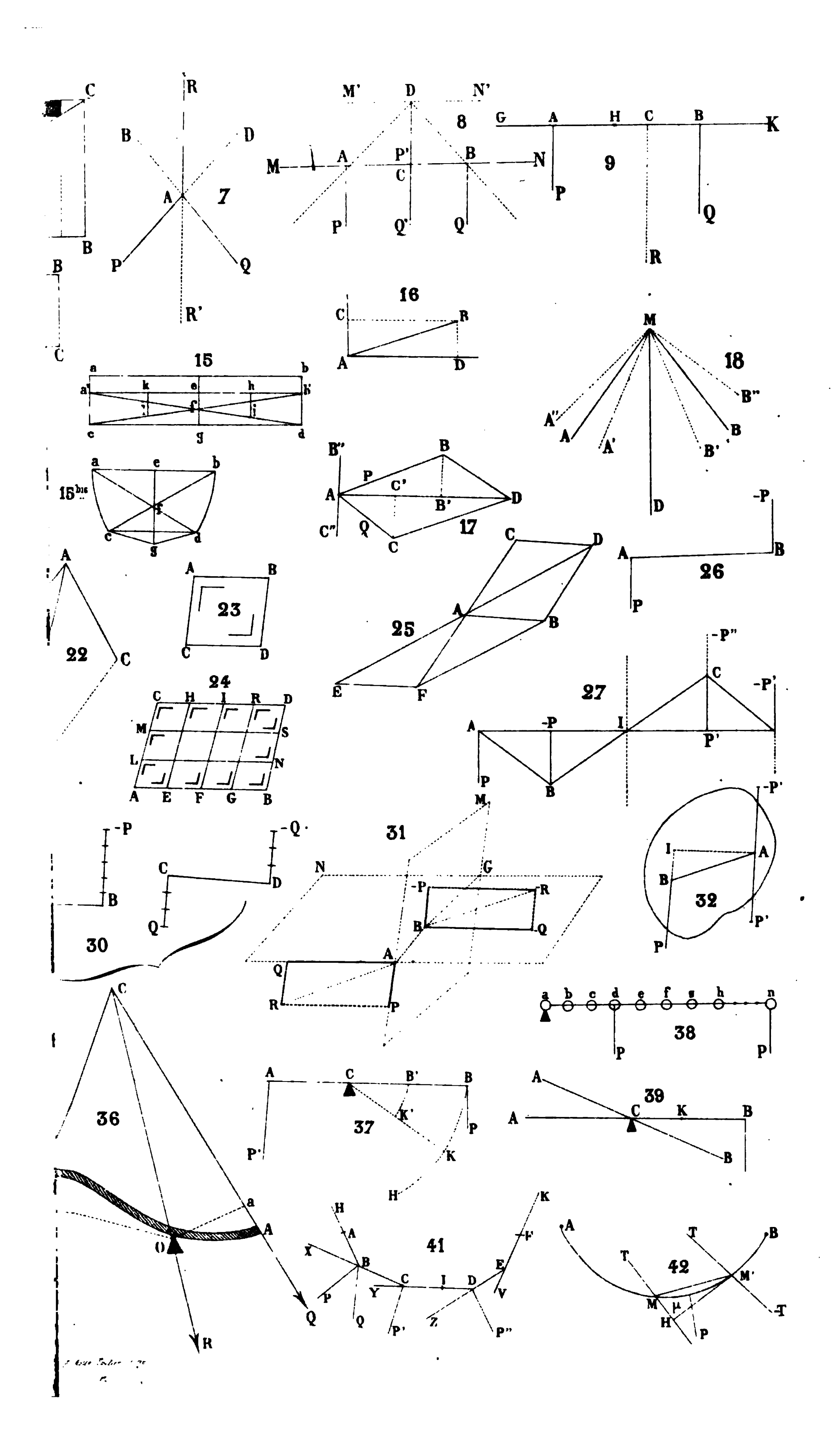
Je n'ai rien à ajouter ici, au sujet de l'infiniment petit. Je m'en tiens à ce que j'en ai dit dans mon introduction.

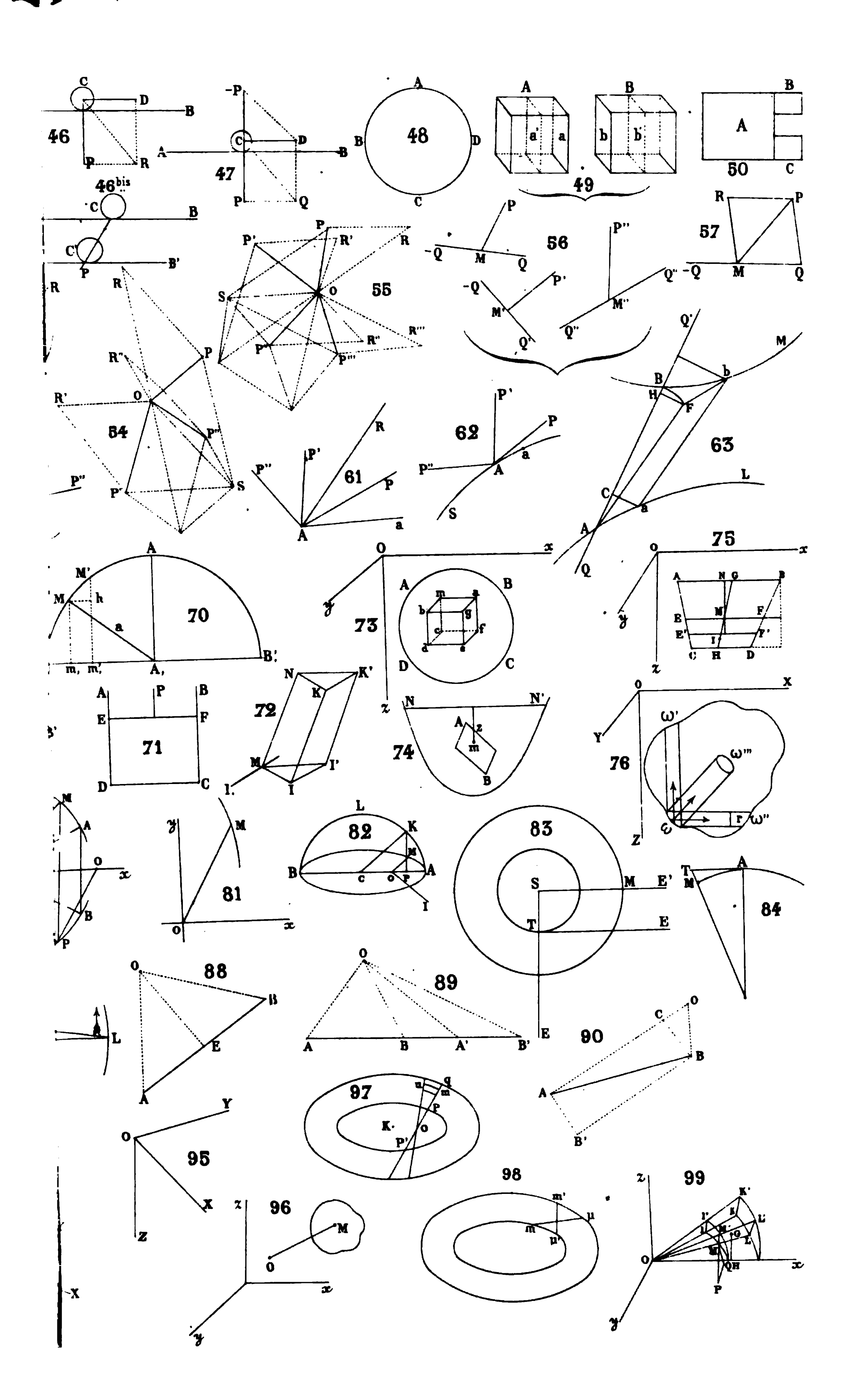
FIN DES NOTES.

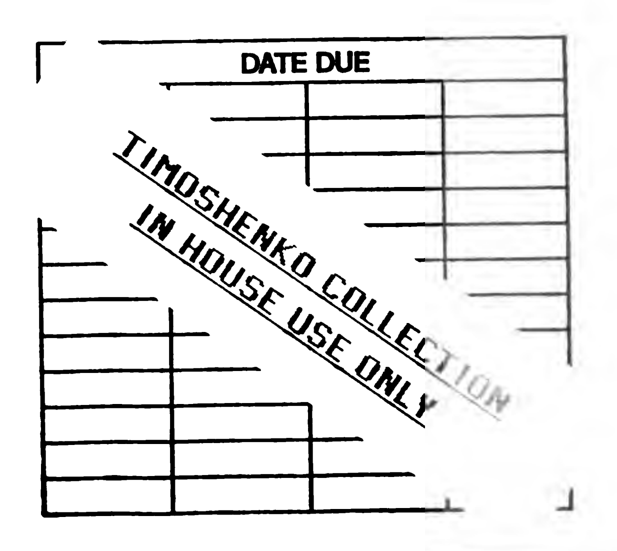
TABLE DES MATIÈRES

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

POITIERS — IMPRIMERIE DE N. BERNARD.






DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY





